Desigualdades de Poincaré-Sobolev con pesos via integración fraccionaria

Alejandro Claros

BCAM - Basque Center for Applied Mathematics
UPV/EHU - Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

XVIII Congreso Dr. Antonio Monteiro





Desigualdad de Poincaré-Sobolev

Theorem

Sea $n \geq 2$ *y* $1 \leq p < n$. *Existe* $c_{n,p} > 0$ *tal que para toda bola* $B \subset \mathbb{R}^n$ *se tiene*

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq c_{n,p} \, r(B) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |\nabla f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f$, *y* $p^* = \frac{np}{n-p}$ $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} = \frac{1}{n} \right)$.

Definition (Potencial de Riesz)

El potencial de Riesz de orden α de una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ está definido por

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$, donde $\alpha \in (0, n)$.

Definition (Potencial de Riesz)

El potencial de Riesz de orden α de una función $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ está definido por

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$, donde $\alpha \in (0,n)$.

- $I_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ donde $q = \frac{np}{n-\alpha p}$ $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}\right)$.
- $I_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$.

Definition (Potencial de Riesz)

El potencial de Riesz de orden α de una función $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ está definido por

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$, donde $\alpha \in (0,n)$.

- $I_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ donde $q = \frac{np}{n-\alpha p}$ $(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n})$.
- $I_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$.

Theorem (Subrepresentation formula)

Existe $c_n > 0$ tal que para cada bola $B \subset \mathbb{R}^n$, tenemos

$$|f(x) - f_B| \leq c_n I_1(|\nabla f|\chi_B)(x), \qquad x \in B.$$

Demostración.

Sea $1 \leq p < n$,

$$\begin{aligned}
\left\| f - f_B \right\|_{L^{p^*,\infty}(B,\frac{dx}{|B|})} &\leq c_n \left\| I_1(|\nabla f|\chi_B) \right\|_{L^{p^*,\infty}(B,\frac{dx}{|B|})} \\
&= c_n \frac{r(B)}{|B|^{\frac{1}{p}}} \left\| I_1(|\nabla f|\chi_B) \right\|_{L^{p^*,\infty}(B,dx)} \\
&\leq c_{n,p} r(B) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |\nabla f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Demostración.

Sea $1 \leq p < n$,

$$\begin{aligned}\left\| f - f_B \right\|_{L^{p^*,\infty}(B,\frac{dx}{|B|})} &\leq c_n \left\| I_1(|\nabla f|\chi_B) \right\|_{L^{p^*,\infty}(B,\frac{dx}{|B|})} \\ &= c_n \frac{r(B)}{|B|^{\frac{1}{p}}} \left\| I_1(|\nabla f|\chi_B) \right\|_{L^{p^*,\infty}(B,dx)} \\ &\leq c_{n,p} r(B) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |\nabla f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Usando el **método del truncamiento** (Maz'ya 85),

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_{n,p} r(B) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |\nabla f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Desigualdades de Poincaré-Sobolev con pesos

Objetivo

Probar

$$\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |f(x)-f_B|^{p_w^*} w(x)dx\right)^{\frac{1}{p_w^*}} \leq C_w r(B)\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para una clase de pesos apropiada, donde $p_w^* > p$.

Desigualdades de Poincaré-Sobolev con pesos

Objetivo

Probar

$$\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |f(x)-f_B|^{p_w^*} w(x)dx\right)^{\frac{1}{p_w^*}} \leq C_w r(B)\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para una clase de pesos apropiada, donde $p_w^* > p$.

Objetivo

Estimaciones cuantitativas de C_w y p_w^*.

Motivación: Degenerate elliptic operators

$$Lu = \operatorname{div}(A(x) \cdot \nabla u), \qquad Lu = 0$$

$$c|\xi|^2 w(x) \leq A(x)\xi \cdot \xi \leq C|\xi|^2 w(x)$$

donde w es un peso con alguna singularidad.
Objetivo: Probar que las soluciones son localmente Hölder continuas.

Motivación: Degenerate elliptic operators

$$Lu = \operatorname{div}(A(x)\cdot\nabla u), \qquad Lu = 0$$

$$c|\xi|^2 w(x) \le A(x)\xi\cdot\xi \le C|\xi|^2 w(x)$$

donde w es un peso con alguna singularidad.
Objetivo: Probar que las soluciones son localmente Hölder continuas.

Método iterativo de Moser: Fabes, Kenig, Serapioni (1982).
Let $w \in A_2$,

- Desigualdad de Poincaré-Sobolev con pesos:

$$\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |f-f_B|^{2^*_w} w dx\right)^{\frac{1}{2^*_w}} \le C_w r(B)\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |\nabla f|^2 w dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

  donde $2^*_w > 2$.

Pesos de Muckenhoupt

- $w \in A_p$:

$$[w]_{A_1} = \sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \operatorname{ess\,sup}_B (w^{-1}) < \infty,$$

$$[w]_{A_p} = \sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1-p'} \right)^{p-1} < \infty \qquad (p > 1),$$

$$[w]_{A_\infty} = \sup_B \frac{1}{w(B)} \int_Q M(w\chi_B)(x)\,dx < \infty.$$

Pesos de Muckenhoupt

- $w \in A_p$:

$$[w]_{A_1} = \sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \operatorname{ess\,sup}_B (w^{-1}) < \infty,$$

$$[w]_{A_p} = \sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1-p'} \right)^{p-1} < \infty \qquad (p > 1),$$

$$[w]_{A_\infty} = \sup_B \frac{1}{w(B)} \int_Q M(w\chi_B)(x)\,dx < \infty.$$

- Acotaciones del operador maximal:

$$\|M\|_{L^p(w) \longrightarrow L^{p,\infty}(w)} \approx_n [w]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \qquad (p \geq 1),$$

$$\|M\|_{L^p(w) \longrightarrow L^p(w)} \leq c_n p' [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \qquad (p > 1)$$

Pesos de Muckenhoupt

- $w \in A_p$:

$$[w]_{A_1} = \sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \operatorname{ess\,sup}_B (w^{-1}) < \infty,$$

$$[w]_{A_p} = \sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1-p'} \right)^{p-1} < \infty \qquad (p > 1),$$

$$[w]_{A_\infty} = \sup_B \frac{1}{w(B)} \int_Q M(w\chi_B)(x)\,dx < \infty.$$

- Acotaciones del operador maximal:

$$\|M\|_{L^p(w) \longrightarrow L^{p,\infty}(w)} \approx_n [w]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \qquad (p \geq 1),$$

$$\|M\|_{L^p(w) \longrightarrow L^p(w)} \leq c_n p' \left([w]_{A_p} [\sigma]_{A_\infty} \right)^{\frac{1}{p}} \leq c_n p' [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \qquad (p > 1)$$

donde $\sigma = w^{1-p'}$.

Integrales fraccionarias y pesos A_p

Motivado por un trabajo de Alberico, Cianchi, and Sbordone (2009).

Theorem (C.)

Sea $1 < p < \frac{n}{\alpha}$. *Sea* $w \in A_r$ *con* $1 \le r \le p$. *Definimos* q_r *como*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q_r} = \frac{\alpha}{n}\frac{1}{r},$$

Entonces, existe $c_n > 0$ *tal que*

$$\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |I_\alpha f(x)|^{q_r} w(x)dx\right)^{\frac{1}{q_r}} \le C\frac{p_\alpha^*}{\alpha}[w]_{A_r}^{\frac{1}{p}}[\sigma]_{A_\infty}^{\frac{1}{q_r}} r(B)^\alpha \left(\frac{1}{w(B)}\int_B |f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$ *y toda función* $f \in L^p(B, w)$.

Integrales fraccionarias y pesos A_p

Theorem (C.)

Sea $1 \le p < \frac{n}{\alpha}$. *Sea* $w \in A_r$ *con* $1 \le r \le p$. *Definimos* q_r *como*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q_r} = \frac{\alpha}{n}\frac{1}{r},$$

Entonces, existe $c_n > 0$ *tal que*

$$\left\| I_\alpha f \right\|_{L^{q_r,\infty}\left(B, \frac{w(x)dx}{w(B)}\right)} \le \frac{c_n}{\alpha} p_\alpha^*[w]_{A_r}^{\frac{1}{p}} r(B)^\alpha \left(\frac{1}{w(B)} \int_B |f(x)|^p w(x)dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$ *y toda función* $f \in L^p(B, w)$.

Desigualdad de Hedberg con pesos

Lemma (C.)

Sea $1 < p < \frac{n}{\alpha}$. *Dado* $1 < r \leq p$ *definimos* q *como*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}\frac{1}{r}.$$

Entonces existe $c_n > 0$ *tal que para toda bola* B *tal que* $0 < \int_B w(y)^{1-r'}\,dy < \infty$ *y toda función* $f \in L^p(B, w)$, *tenemos*

$$|I_\alpha f(x)| \leq \frac{c_n}{\alpha} p_\alpha^* Mf(x)^{\frac{p}{q}} \|f\|_{L^p(B,w)}^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_B w(y)^{1-r'}\,dy\right)^{\frac{\alpha}{nr'}},$$

para todo $x \in B$.

Desigualdades de Poincaré-Sobolev con pesos A_p

Theorem (C.)

Sea $1 \leq p < n$. Sea $w \in A_r$ con $1 \leq r \leq p$. Definimos q_r como

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q_r} = \frac{1}{n}\frac{1}{r},$$

Entonces, existe $c_n > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |f(x) - f_B|^{q_r} w(x)dx\right)^{\frac{1}{q_r}} \leq c_n p^* [w]_{A_r}^{\frac{1}{p}} r(B)\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda bola B. Además, el exponente $\frac{1}{p}$ en la constante A_r es ***óptimo***.

Desigualdades de Poincaré-Sobolev con pesos A_p

Theorem (C.)

Sea $1 \le p < n$. Sea $w \in A_r$ con $1 \le r \le p$. Definimos q_r como

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q_r} = \frac{1}{n}\frac{1}{r},$$

Entonces, existe $c_n > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |f(x) - f_B|^{q_r} w(x)dx\right)^{\frac{1}{q_r}} \le c_n p^* [w]_{A_r}^{\frac{1}{p}} r(B) \left(\frac{1}{w(B)}\int_B |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda bola B. Además, el exponente $\frac{1}{p}$ en la constante A_r es ***óptimo***.

- El caso $r = 1$ $(w \in A_1)$ resuelve una conjetura de Pérez-Rela (2019) sobre el exponente optimo en la constante A_1 en esta desigualdad.

Aplicaciones a desigualdades fraccionarias

- Sean $1 \leq p < \infty$ y $\delta \in (0,1)$. Entonces, para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$ y toda función $f \in W^{\delta,p}(B)$, tenemos

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f_B| dx \leq c_n r(B)^{\delta} \left(\frac{1}{|B|}\int_B \int_B \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}} dy\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicaciones a desigualdades fraccionarias

- Sean $1 \leq p < \infty$ y $\delta \in (0,1)$. Entonces, para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$ y toda función $f \in W^{\delta,p}(B)$, tenemos

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f_B| dx \leq c_n r(B)^{\delta} \left(\frac{1}{|B|}\int_B \int_B \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}} dy\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Bourgain-Brezis-Mironescu (2001)

$$\lim_{\delta \uparrow 1} (1-\delta)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}} dy\, dx \right)^{\frac{1}{p}} = K_{n,p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicaciones a desigualdades fraccionarias

- Sean $1 \leq p < \infty$ y $\delta \in (0,1)$. Entonces, para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$ y toda función $f \in W^{\delta,p}(B)$, tenemos

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f_B| dx \leq c_n r(B)^{\delta} \left(\frac{1}{|B|}\int_B \int_B \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}} dy\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Bourgain-Brezis-Mironescu (2001)

$$\lim_{\delta \uparrow 1} (1-\delta)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}} dy\, dx \right)^{\frac{1}{p}} = K_{n,p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Bourgain-Brezis-Mironescu (2001), Milman (2005)

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f_B| dx \leq c_n (1-\delta)^{\frac{1}{p}} r(B)^{\delta} \left(\frac{1}{|B|}\int_B \int_B \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}} dy\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicaciones a desigualdades fraccionarias

Theorem (C.)

Sean $n \geq 2$, $\delta \in (0,1)$, $1 \leq p < \frac{n}{\delta}$ y sea $w \in A_1$. Entonces, existe una constante dimensioanal $c_n > 0$ tal que,

$$\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |f(x)-f_B|^{p\left(\frac{n}{\delta}\right)'} w(x)dx\right)^{\frac{1}{p\left(\frac{n}{\delta}\right)'}} \leq c_n(1-\delta)^{\frac{1}{p}}[w]_{A_1}^{\frac{1}{p}} r(B)^{\delta}$$
$$\cdot\left(\frac{1}{w(B)}\int_B\int_B \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}}dy\,w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda bola B.

Exponente de Sobolev con peso p_w^*

Definition

Dado $w \in A_\infty$, definimos

$$I(w) := \{p \geq 1 : w \in A_p\}$$

Exponente de Sobolev con peso p_w^*

Definition

Dado $w \in A_\infty$, definimos

$$I(w) := \{p \geq 1 : w \in A_p\} = \begin{cases} [1, \infty) & \text{if } w \in A_1 \end{cases}$$

Exponente de Sobolev con peso p_w^*

Definition

Dado $w \in A_\infty$, definimos

$$I(w) := \{p \geq 1 : w \in A_p\} = \begin{cases} [1,\infty) & \text{if } w \in A_1 \\ (\ell_w,\infty) & \text{if } w \in A_\infty \setminus A_1 \end{cases},$$

donde $\ell_w := \inf I(w)$.

- Hagelstein, Parissis (2016): $\ell_w \leq e^{c_n [w]_{A_\infty}}$.

Exponente de Sobolev con peso p_w^*

Definition

Dado $w \in A_\infty$, definimos

$$I(w) := \{p \geq 1 : w \in A_p\} = \begin{cases} [1,\infty) & \text{if } w \in A_1 \\ (\ell_w,\infty) & \text{if } w \in A_\infty \setminus A_1 \end{cases},$$

donde $\ell_w := \inf I(w)$.

- Hagelstein, Parissis (2016): $\ell_w \leq e^{c_n [w]_{A_\infty}}$.

Definition

Sean $n \geq 2$, $1 \leq p < n$ y $w \in A_\infty$. Definimos el exponente de Sobolev con peso p_w^* como

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p_w^*} = \frac{1}{n}\frac{1}{\ell_w}.$$

Exponente de Sobolev con peso p_w^*

Corollary (C.)

Sean $1 \le p < n\ell_w$ *y* $w \in A_p$. *Entonces, para cada* $1 \le q < p_w^*$, *tenemos*

$$\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |f(x)-f_B|^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C_w r(B)\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda bola B, *donde la constante* $C_w = c_n p^* [w]_{A_r}^{\frac{1}{p}}$ *para algún* $r = r(q) > \ell_w$.

Exponente de Sobolev con peso p_w^*

Corollary (C.)

Sean $1 \le p < n\ell_w$ y $w \in A_p$. Entonces, para cada $1 \le q < p_w^*$, tenemos

$$\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |f(x)-f_B|^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C_w r(B)\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda bola B, donde la constante $C_w = c_n p^* [w]_{A_r}^{\frac{1}{p}}$ para algún $r = r(q) > \ell_w$.

Theorem (C.)

Podemos encontrar un peso $w \in A_p$ tal que si la desigualdad

$$\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |f(x)-f_B|^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C_w r(B)\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

es cierta para toda función Lipschitz f, entonces $q \le p_w^*$.

Exponente de Sobolev con peso p_w^*

Corollary (C.)

Sean $1 \le p < n\ell_w$ y $w \in A_p$. Entonces, para cada $1 \le q < p_w^*$, tenemos

$$\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |f(x)-f_B|^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C_w r(B)\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda bola B, donde la constante $C_w = c_n p^* [w]_{A_r}^{\frac{1}{p}}$ para algún $r = r(q) > \ell_w$.

Theorem (C.)

Podemos encontrar un peso $w \in A_p$ tal que si la desigualdad

$$\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |f(x)-f_B|^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C_w r(B)\left(\frac{1}{w(B)}\int_B |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

es cierta para toda función Lipschitz f, entonces $q \le p_w^*$.

- **No** sabemos si la desigualdad es cierta en el extremo $q = p_w^*$.

Muchas gracias!