Desigualdades de Poincaré-Sobolev con pesos

Alejandro Claros

BCAM - Basque Center for Applied Mathematics
UPV/EHU - Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

1 de Septiembre de 2025

Trabajo en conjunto con Carlos Pérez





1. Introducción y motivación
2. Automejora de desigualdades de Poincaré generalizadas
3. Desigualdades de Poincaré-Sobolev via integración fraccionaria

Section 1

Introducción y motivación

Desigualdades de Poincaré

Theorem ((1,1) Poincaré Inequality)

Existe $c_n > 0$ *tal que para todo cube* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *tenemos*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq c_n \ell(Q) \frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|dx,$$

donde $f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f$ *y* $f \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Desigualdades de Poincaré

Theorem ((1,1) Poincaré Inequality)

Existe $c_n > 0$ *tal que para todo cube* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *tenemos*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq c_n \ell(Q) \frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|dx,$$

donde $f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f$ *y* $f \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

- Potencial de Riesz: $I_\alpha f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$

Theorem (Subrepresentation formula)

Existe $c_n > 0$ *tal que para todo cubo* $Q \subset \mathbb{R}^n$, *tenemos*

$$|f(x) - f_Q| \leq c_n I_1(|\nabla f|\chi_Q)(x), \qquad x \in Q.$$

Desigualdades de Poincaré

Proof.

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq & c_n \frac{1}{|Q|}\int_Q I_1(|\nabla f|\chi_Q)(x)dx \\ = & c_n \frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)| I_1(\chi_Q)(x)dx \\ \leq & c_n \ell(Q)\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|dx\end{aligned}$$

□

Desigualdades de Poincaré

La desigualdad de Poincaré (1,1) implica:

- Desigualdad de Poincaré $(1,p)$

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq c_n \ell(Q)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Desigualdades de Poincaré

La desigualdad de Poincaré (1,1) implica:

- Desigualdad de Poincaré $(1,p)$

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq c_n \ell(Q)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

- Desigualdad de Poincaré (p,p)

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_n \ell(Q)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Desigualdades de Poincaré

La desigualdad de Poincaré (1,1) implica:

- Desigualdad de Poincaré $(1,p)$

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq c_n \ell(Q)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

- Desigualdad de Poincaré (p,p)

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_n \ell(Q)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

- Desigualdad de Poincaré-Sobolev

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq c_n \ell(Q)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

donde $p^* = \frac{pn}{n-p}$ $(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}=\frac{1}{n})$ para $1 \leq p < n$.

Motivación: Operadores elípticos

$$Lu = \operatorname{div}(A(x) \cdot \nabla u), \qquad Lu = 0$$

donde $A(x)$ es una matrix $n \times n$ tal que

$$c|\xi|^2 \leq A(x)\xi \cdot \xi \leq C|\xi|^2.$$

Objetivo: Probar que las soluciones son localmente Hölder continuas.

Motivación: Operadores elípticos

$$Lu = \operatorname{div}(A(x) \cdot \nabla u), \qquad Lu = 0$$

donde $A(x)$ es una matrix $n \times n$ tal que

$$c|\xi|^2 \leq A(x)\xi \cdot \xi \leq C|\xi|^2.$$

Objetivo: Probar que las soluciones son localmente Hölder continuas.

- Di Giorgi (1957), Nash (1957).
- Moser (1960) (Moser iteration method)
  - Desigualdad de Poincaré $(2, 2)$,
  - Desigualdad de Poincaré-Sobolev $(p = 2)$

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq c_n \ell(Q) \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Motivación: Degenerate elliptic operators

$$Lu = \operatorname{div}(A(x) \cdot \nabla u), \qquad Lu = 0$$

$$c|\xi|^2 w(x) \leq A(x)\xi \cdot \xi \leq C|\xi|^2 w(x)$$

donde w es un peso con alguna singularidad.
Objetivo: Probar que las soluciones son localmente Hölder continuas.

Motivación: Degenerate elliptic operators

$$Lu = \operatorname{div}(A(x) \cdot \nabla u), \qquad Lu = 0$$

$$c|\xi|^2 w(x) \leq A(x)\xi \cdot \xi \leq C|\xi|^2 w(x)$$

donde w es un peso con alguna singularidad.
Objetivo: Probar que las soluciones son localmente Hölder continuas.

Método iterativo de Moser: Fabes, Kenig, Serapioni (1982).
Let $w \in A_2$,

- Desigualdad de Poincaré-Sobolev con pesos:

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_B |f - f_Q|^{2_w^*} w dx\right)^{\frac{1}{2_w^*}} \leq C_w \ell(Q) \left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f|^2 w dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

donde $2_w^* > 2$.

Desigualdades de Poincaré-Sobolev con pesos

Objetivo 1

Probar

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(x)-f_Q|^{p_w^*} w(x)dx\right)^{\frac{1}{p_w^*}} \leq C_w \ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para una clase apropiada de pesos, donde $p_w^* > p$.

Desigualdades de Poincaré-Sobolev con pesos

Objetivo 1

Probar

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(x)-f_Q|^{p_w^*} w(x)dx\right)^{\frac{1}{p_w^*}} \leq C_w \ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para una clase apropiada de pesos, donde $p_w^* > p$.

Objetivo 1'

Probar

$$\|f-f_Q\|_{L^{p_w^*,q}\left(Q,\frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq C_w \ell(Q)\,\|\nabla f\|_{L^{p,r}\left(Q,\frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)}$$

para una clase apropiada de pesos, donde $p_w^* > p$, $1 \leq q, r \leq \infty$.

Desigualdades de Poincaré-Sobolev con pesos

Objetivo 1

Probar

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(x)-f_Q|^{p_w^*}w(x)dx\right)^{\frac{1}{p_w^*}} \leq C_w\ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para una clase apropiada de pesos, donde $p_w^* > p$.

Objetivo 1'

Probar

$$\|f-f_Q\|_{L^{p_w^*,q}\left(Q,\frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq C_w\ell(Q)\,\|\nabla f\|_{L^{p,r}\left(Q,\frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)}$$

para una clase apropiada de pesos, donde $p_w^* > p$, $1 \leq q, r \leq \infty$.

Objetivo 2

Buenas estimaciones para C_w y p_w^*.

Pesos de Muckenhoupt

- $w \in A_p$:

$$[w]_{A_1} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right) \operatorname{ess\,sup}_Q (w^{-1}) < \infty,$$

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1} < \infty \qquad (p>1),$$

$$[w]_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{w(Q)}\int_Q M(w\chi_Q)(x)dx < \infty.$$

Pesos de Muckenhoupt

- $w \in A_p$:

$$[w]_{A_1} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right) \operatorname{ess\,sup}_Q (w^{-1}) < \infty,$$

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1} < \infty \qquad (p>1),$$

$$[w]_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{w(Q)}\int_Q M(w\chi_Q)(x)dx < \infty.$$

- Acotaciones del operador maximal:

$$\|M\|_{L^p(w)\longrightarrow L^{p,\infty}(w)} \approx_n [w]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \qquad (p \geq 1),$$

$$\|M\|_{L^p(w)\longrightarrow L^{p}(w)} \leq c_n p' [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \qquad (p > 1)$$

Pesos de Muckenhoupt

- $w \in A_p$:

$$[w]_{A_1} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right) \operatorname{ess\,sup}_Q (w^{-1}) < \infty,$$

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1} < \infty \qquad (p>1),$$

$$[w]_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{w(Q)}\int_Q M(w\chi_Q)(x)dx < \infty.$$

- Acotaciones del operador maximal:

$$\|M\|_{L^p(w)\longrightarrow L^{p,\infty}(w)} \approx_n [w]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \qquad (p \geq 1),$$

$$\|M\|_{L^p(w)\longrightarrow L^p(w)} \leq c_n p' \left([w]_{A_p}[\sigma]_{A_\infty}\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_n p' [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \qquad (p>1)$$

donde $\sigma = w^{1-p'}$ es el peso dual (Hytönen-Pérez, 2012).

Section 2

Automejora de desigualdades de Poincaré generalizadas

Self-improving of Poincaré-type inequalities

Sea $w \in A_p$, para cada cubo Q tenemos,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq c_n \ell(Q) \frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|dx$$

Self-improving of Poincaré-type inequalities

Sea $w \in A_p$, para cada cubo Q tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq & c_n \ell(Q)\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|dx \\ \leq & c_n [w]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Self-improving of Poincaré-type inequalities

Sea $w \in A_p$, para cada cubo Q tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq & c_n \ell(Q)\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|dx \\ \leq & c_n [w]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ =: & a_f(Q), \qquad\qquad a_f : \mathcal{Q} \longrightarrow (0,\infty)\end{aligned}$$

Self-improving of Poincaré-type inequalities

Sea $w \in A_p$, para cada cubo Q tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq & c_n \ell(Q)\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|dx \\ \leq & c_n [w]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ =: & a_f(Q), \qquad\qquad a_f : \mathcal{Q} \longrightarrow (0,\infty)\end{aligned}$$

Definition

$a \in D_p(w)$ si para cada cubo Q y cada familia disjunta $\{Q_i\}_i \subset Q$,

$$\sum_i a(Q_i)^p w(Q_i) \leq \|a\|_{D_p}^p \, a(Q)^p w(Q).$$

Self-improving of Poincaré-type inequalities

Sea $w \in A_p$, para cada cubo Q tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq & c_n \ell(Q)\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|dx \\ \leq & c_n [w]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ =: & a_f(Q), \qquad\qquad a_f : \mathcal{Q} \longrightarrow (0,\infty)\end{aligned}$$

Definition

$a \in D_p(w)$ si para cada cubo Q y cada familia disjunta $\{Q_i\}_i \subset Q$,

$$\sum_i a(Q_i)^p w(Q_i) \leq \|a\|_{D_p}^p a(Q)^p w(Q).$$

- El ejemplo modelo es $a_\mu(Q) = \lambda \ell(Q)^\alpha \left(\frac{\mu(Q)}{w(Q)}\right)^{\frac{1}{p}}$ donde μ es una medida y $p, \alpha > 0$.

Ejemplo modelo

Sea $\{Q_i\}_i \subset Q$ una familia disjunta,

$$\sum_i a_\mu(Q_i)^p w(Q_i) = \lambda^p \sum_i \ell(Q_i)^{\alpha p} \frac{\mu(Q_i)}{w(Q_i)} w(Q_i)$$

Ejemplo modelo

Sea $\{Q_i\}_i \subset Q$ una familia disjunta,

$$\begin{aligned}\sum_i a_\mu(Q_i)^p w(Q_i) =& \lambda^p \sum_i \ell(Q_i)^{\alpha p} \frac{\mu(Q_i)}{w(Q_i)} w(Q_i) \\ \leq& \lambda^p \ell(Q)^{\alpha p} \sum_i \mu(Q_i)\end{aligned}$$

Ejemplo modelo

Sea $\{Q_i\}_i \subset Q$ una familia disjunta,

$$\begin{aligned}\sum_i a_\mu(Q_i)^p w(Q_i) =& \lambda^p \sum_i \ell(Q_i)^{\alpha p} \frac{\mu(Q_i)}{w(Q_i)} w(Q_i) \\ \leq& \lambda^p \ell(Q)^{\alpha p} \sum_i \mu(Q_i) \\ \leq& \lambda^p \ell(Q)^{\alpha p} \frac{\mu(Q)}{w(Q)} w(Q) \\ =& a_\mu(Q)^p w(Q).\end{aligned}$$

Ejemplo modelo

Sea $\{Q_i\}_i \subset Q$ una familia disjunta,

$$\begin{aligned}\sum_i a_\mu(Q_i)^p w(Q_i) =& \lambda^p \sum_i \ell(Q_i)^{\alpha p} \frac{\mu(Q_i)}{w(Q_i)} w(Q_i) \\ \leq& \lambda^p \ell(Q)^{\alpha p} \sum_i \mu(Q_i) \\ \leq& \lambda^p \ell(Q)^{\alpha p} \frac{\mu(Q)}{w(Q)} w(Q) \\ =& a_\mu(Q)^p w(Q).\end{aligned}$$

- $a_\mu \in D_p(w)$ con $\|a\|_{D_p} = 1$.

Ejemplo modelo

Sea $\{Q_i\}_i \subset Q$ una familia disjunta,

$$\begin{aligned}\sum_i a_\mu(Q_i)^p w(Q_i) =& \lambda^p \sum_i \ell(Q_i)^{\alpha p} \frac{\mu(Q_i)}{w(Q_i)} w(Q_i) \\ \leq& \lambda^p \ell(Q)^{\alpha p} \sum_i \mu(Q_i) \\ \leq& \lambda^p \ell(Q)^{\alpha p} \frac{\mu(Q)}{w(Q)} w(Q) \\ =& a_\mu(Q)^p w(Q).\end{aligned}$$

- $a_\mu \in D_p(w)$ con $\|a\|_{D_p} = 1$.
- Si $w \in A_\infty$, entonces podemos probar $a_\mu \in D_q(w)$ para algún $q > p$.

Automejora con condición $D_p(w)$

Theorem (Franchi, Pérez, Wheeden 98; Canto, Pérez 21)

Sea $a \in D_p(w)$ *con* $w \in A_\infty$. *Sea* $f \in L^1_{loc}$ *tal que*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq a(Q), \qquad \text{para todo cubo } Q.$$

Entonces, para todo cubo Q *tenemos,*

$$\|f - f_Q\|_{L^{p,\infty}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq c_n p [w]_{A_\infty} \|a\|_{D_p} a(Q).$$

Automejora con condición $D_p(w)$

Theorem (Franchi, Pérez, Wheeden 98; Canto, Pérez 21)

Sea $a \in D_p(w)$ con $w \in A_\infty$. Sea $f \in L^1_{loc}$ tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq a(Q), \qquad \text{para todo cubo } Q.$$

Entonces, para todo cubo Q tenemos,

$$\|f - f_Q\|_{L^{p,\infty}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq c_n p [w]_{A_\infty} \|a\|_{D_p} a(Q).$$

- Aplicando este resultado al ejemplo anterior obtenemos:

$$\|f - f_Q\|_{L^{p,\infty}\left(Q, \frac{wdx}{w(Q)}\right)} \leq c_n p [w]_{A_\infty} [w]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \ell(Q) \left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f|^p w dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ejemplo modelo: revisitado

Sea $\{Q_i\}_i \subset Q$ una familia disjunta de subcubos de Q,

$$\sum_i a_\mu(Q_i)^p w(Q_i) = \lambda^p \sum_i \ell(Q_i)^{\alpha p} \mu(Q_i)$$

Ejemplo modelo: revisitado

Sea $\{Q_i\}_i \subset Q$ una familia disjunta de subcubos de Q,

$$\begin{aligned}\sum_i a_\mu(Q_i)^p w(Q_i) &= \lambda^p \sum_i \ell(Q_i)^{\alpha p} \mu(Q_i) \\ &\leq \lambda^p \sup_i \ell(Q_i)^{\alpha p} \sum_i \mu(Q_i)\end{aligned}$$

Ejemplo modelo: revisitado

Sea $\{Q_i\}_i \subset Q$ una familia disjunta de subcubos de Q,

$$\begin{aligned}\sum_i a_\mu(Q_i)^p w(Q_i) =& \lambda^p \sum_i \ell(Q_i)^{\alpha p} \mu(Q_i) \\ \leq& \lambda^p \sup_i \ell(Q_i)^{\alpha p} \sum_i \mu(Q_i) \\ =& \lambda^p \left(\sup_i |Q_i| \right)^{\frac{\alpha p}{n}} \sum_i \mu(Q_i)\end{aligned}$$

Ejemplo modelo: revisitado

Sea $\{Q_i\}_i \subset Q$ una familia disjunta de subcubos de Q,

$$\begin{aligned}
\sum_i a_\mu(Q_i)^p w(Q_i) &= \lambda^p \sum_i \ell(Q_i)^{\alpha p} \mu(Q_i) \\
&\leq \lambda^p \sup_i \ell(Q_i)^{\alpha p} \sum_i \mu(Q_i) \\
&= \lambda^p \left(\sup_i |Q_i| \right)^{\frac{\alpha p}{n}} \sum_i \mu(Q_i) \\
&\leq \lambda^p \left| \cup_i Q_i \right|^{\frac{\alpha p}{n}} \frac{\mu(Q)}{w(Q)} w(Q)
\end{aligned}$$

Ejemplo modelo: revisitado

Sea $\{Q_i\}_i \subset Q$ una familia disjunta de subcubos de Q,

$$\begin{aligned}
\sum_i a_\mu(Q_i)^p w(Q_i) =& \lambda^p \sum_i \ell(Q_i)^{\alpha p} \mu(Q_i) \\
\leq& \lambda^p \sup_i \ell(Q_i)^{\alpha p} \sum_i \mu(Q_i) \\
=& \lambda^p \left(\sup_i |Q_i| \right)^{\frac{\alpha p}{n}} \sum_i \mu(Q_i) \\
\leq& \lambda^p \left| \cup_i Q_i \right|^{\frac{\alpha p}{n}} \frac{\mu(Q)}{w(Q)} w(Q) \\
=& \left(\frac{|\cup_i Q_i|}{|Q|} \right)^{\frac{\alpha p}{n}} a_\mu(Q)^p w(Q).
\end{aligned}$$

Automejora con condición $SD_p^s(w)$

Definition

$a \in SD_p^s(w)$ si para todo cubo Q y cada familia disjunta $\{Q_i\}_i \subset Q$ tenemos,

$$\sum_i a(Q_i)^p w(Q_i) \leq \|a\|^p_{SD_p^s} \left(\frac{|\cup_i Q_i|}{|Q|} \right)^{\frac{p}{s}} a(Q)^p w(Q).$$

Automejora con condición $SD_p^s(w)$

Definition

$a \in SD_p^s(w)$ si para todo cubo Q y cada familia disjunta $\{Q_i\}_i \subset Q$ tenemos,

$$\sum_i a(Q_i)^p w(Q_i) \leq \|a\|_{SD_p^s}^p \left(\frac{|\cup_i Q_i|}{|Q|}\right)^{\frac{p}{s}} a(Q)^p w(Q).$$

Theorem (Pérez, Rela 19)

Sea $a \in SD_p^s(w)$ con $w \in A_\infty$. Sea $f \in L^1_{loc}$ tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq a(Q), \qquad \text{para todo cubo } Q.$$

Entonces, para todo cubo Q tenemos,

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(x) - f_Q|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_n s \|a\|_{SD_p^s}^s a(Q).$$

Observaciones

- Pérez y Rela conjeturaron que el resultado es cierto sin la condición A_∞.

Observaciones

- Pérez y Rela conjeturaron que el resultado es cierto sin la condición A_∞.
- Recientemente, se ha probado la conjetura usando dominación sparse.

Theorem (Lerner, Lorist, Ombrosi 22)

Sea $a \in SD_p^s(w)$. *Sea* $f \in L^1_{loc}$ *tal que*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq a(Q), \qquad \text{for all cube } Q.$$

Entonces, para cada Q,

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(x) - f_Q|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_n(1+s)\,\|a\|_{SD_p^s}\, a(Q).$$

Automejora con condición $SD_p^s(w)$

Theorem (C., Pérez)

Sea $a \in SD_p^s(w)$ con $w \in A_\infty$. Sea $f \in L^1_{loc}$ tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq a(Q), \qquad \text{para todo cubo } Q.$$

Entonces, para cada cubo Q,

$$\|f - f_Q\|_{L^{p\left(1+\frac{1}{s}\right),\infty}\left(Q,\frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq c_n p\left(1+\frac{1}{s}\right)\|a\|_{SD_p^s}^{\frac{s}{s+1}}[w]_{A_\infty}a(Q).$$

Automejora con condición $SD_p^s(w)$

Theorem (C., Pérez)

Sea $a \in SD_p^s(w)$ con $w \in A_\infty$. Sea $f \in L^1_{loc}$ tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq a(Q), \qquad \text{para todo cubo } Q.$$

Entonces, para cada cubo Q,

$$\|f - f_Q\|_{L^{p\left(1+\frac{1}{s}\right),\infty}\left(Q,\frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq c_n p\left(1+\frac{1}{s}\right)\|a\|_{SD_p^s}^{\frac{s}{s+1}}[w]_{A_\infty}a(Q).$$

- Recuperamos los resultados de automejora anteriores con la condición $D_p(w)$ [FPW98, CP21] (Idea: $SD_p^\infty = D_p$).

Automejora con condición $SD_p^s(w)$

Theorem (C., Pérez)

Sea $a \in SD_p^s(w)$ con $w \in A_\infty$. Sea $f \in L^1_{loc}$ tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq a(Q), \qquad \text{para todo cubo } Q.$$

Entonces, para cada cubo Q,

$$\|f - f_Q\|_{L^{p\left(1+\frac{1}{s}\right),\infty}\left(Q,\frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq c_n p\left(1+\frac{1}{s}\right)\|a\|_{SD_p^s}^{\frac{s}{s+1}}[w]_{A_\infty}a(Q).$$

- Recuperamos los resultados de automejora anteriores con la condición $D_p(w)$ [FPW98, CP21] (Idea: $SD_p^\infty = D_p$).
- Es una desigualdad de Poincaré-Sobolev.

Automejora con condición $SD_p^s(w)$

Theorem (C., Pérez)

Sea $a \in SD_p^s(w)$ con $w \in A_\infty$. Sea $f \in L^1_{loc}$ tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq a(Q), \qquad \text{para todo cubo } Q.$$

Entonces, para cada cubo Q,

$$\|f - f_Q\|_{L^{p\left(1+\frac{1}{s}\right),\infty}\left(Q,\frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq c_n p\left(1+\frac{1}{s}\right)\|a\|_{SD_p^s}^{\frac{s}{s+1}}[w]_{A_\infty}a(Q).$$

- Recuperamos los resultados de automejora anteriores con la condición $D_p(w)$ [FPW98, CP21] (Idea: $SD_p^\infty = D_p$).
- Es una desigualdad de Poincaré-Sobolev.
- La prueba se basa en una good-lambda que es consecuencia de una extensión de la desigualdad de John-Nirenberg para pesos A_∞ [CP21].

Automejora con condición $SD_p^s(w)$

Theorem (C., Pérez)

Sea $a \in SD_p^s(w)$. Sea $f \in L^1_{loc}$ tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq a(Q)$$

y,

$$\|f - f_Q\|_{L^{p,\infty}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq Ka(Q),$$

para todo cubo Q, donde K es una constante que no depende de Q. Entonces,,

$$\|f - f_Q\|_{L^{p\left(1+\frac{1}{s}\right),\infty}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq c_n \max\left\{1, K\|a\|\right\}^{\frac{s}{s+1}} a(Q),$$

para todo Q.

Automejora con condición $SD_p^s(w)$

Theorem (C., Pérez)

Sea $a \in SD_p^s(w)$. Sea $f \in L^1_{loc}$ tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq a(Q)$$

y,

$$\|f - f_Q\|_{L^{p,\infty}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq Ka(Q),$$

para todo cubo Q, donde K es una constante que no depende de Q. Entonces,,

$$\|f - f_Q\|_{L^{p\left(1+\frac{1}{s}\right),\infty}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq c_n \max\left\{1, K\|a\|\right\}^{\frac{s}{s+1}} a(Q),$$

para todo Q.

- Usando el resultado de [LLO22] podemos obtener la segunda desigualdad con $K = c_n(1+s)\|a\|_{SD_p^s}$.

Demostración

Fijamos un cubo Q, y sea $t > a(Q)$, entonces

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq a(Q) < t.$$

Demostración

Fijamos un cubo Q, y sea $t > a(Q)$, entonces

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq a(Q) < t.$$

Consideramos la descomposición de Calderón-Zygmund de $|f - f_Q|$ en el cubo Q a altura t. Entonces, existe una familia de subcubos diádicos disjuntos $\{Q_j\}_j$, tales que,

- Para cada j,
$$t < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x) - f_Q|dx \leq 2^n t.$$
-
$$\frac{\left|\bigcup_j Q_j\right|}{|Q|} \leq \frac{a(Q)}{t}.$$
- Para casi todo $x \in Q \setminus \bigcup_j Q_j$,
$$|f(x) - f_Q| \leq t.$$

Demostración

Sea $c_n = 2^n + 1$,

$$\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > c_n t\} = \left(\bigcup_j \{x \in Q_j : |f(x) - f_Q| > c_n t\} \right)$$
$$\cup \left\{ x \in Q \setminus \bigcup_j Q_j : |f(x) - f_Q| > c_n t \right\}$$

Demostración

Sea $c_n = 2^n + 1$,

$$\begin{aligned}\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > c_n t\} &= \left(\bigcup_j \{x \in Q_j : |f(x) - f_Q| > c_n t\} \right) \\ &\quad \cup \left\{ x \in Q \setminus \bigcup_j Q_j : |f(x) - f_Q| > c_n t \right\} \\ &\subseteq \left(\bigcup_j \{x \in Q_j : |f(x) - f_{Q_j}| > t\} \right) \\ &\quad \cup \left\{ x \in Q \setminus \bigcup_j Q_j : |f(x) - f_Q| > c_n t \right\},\end{aligned}$$

donde $|\{x \in Q \setminus \cup_j Q_j : |f(x) - f_Q| > c_n t\}| = 0$.

Demostración

Entonces,

$$w\left(\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > c_n t\}\right) \leq \sum_j w\left(\left\{x \in Q_j : |f(x) - f_{Q_j}| > t\right\}\right)$$

Demostración

Entonces,

$$\begin{aligned} w\left(\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > c_n t\}\right) &\leq \sum_j w\left(\left\{x \in Q_j : |f(x) - f_{Q_j}| > t\right\}\right) \\ &\leq K^p t^{-p} \sum_j a(Q_j)^p w(Q_j) \end{aligned}$$

Demostración

Entonces,

$$
\begin{aligned}
w\left(\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > c_n t\}\right) \leq & \sum_j w\left(\left\{x \in Q_j : |f(x) - f_{Q_j}| > t\right\}\right) \\
\leq & K^p t^{-p} \sum_j a(Q_j)^p w(Q_j) \\
\leq & K^p t^{-p} \|a\|^p \left(\frac{\left|\bigcup_j Q_j\right|}{|Q|}\right)^{\frac{p}{s}} a(Q)^p w(Q)
\end{aligned}
$$

Demostración

Entonces,

$$
\begin{aligned}
w\left(\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > c_n t\}\right) \leq & \sum_j w\left(\left\{x \in Q_j : |f(x) - f_{Q_j}| > t\right\}\right) \\
\leq & K^p t^{-p} \sum_j a(Q_j)^p w(Q_j) \\
\leq & K^p t^{-p} \|a\|^p \left(\frac{\left|\bigcup_j Q_j\right|}{|Q|}\right)^{\frac{p}{s}} a(Q)^p w(Q) \\
\leq & K^p \|a\|^p \left(\frac{a(Q)}{t}\right)^{p+\frac{p}{s}} w(Q).
\end{aligned}
$$

Demostración

Entonces,

$$\begin{aligned} w\left(\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > c_n t\}\right) \leq & \sum_j w\left(\{x \in Q_j : |f(x) - f_{Q_j}| > t\}\right) \\ \leq & K^p t^{-p} \sum_j a(Q_j)^p w(Q_j) \\ \leq & K^p t^{-p} \|a\|^p \left(\frac{\left|\bigcup_j Q_j\right|}{|Q|}\right)^{\frac{p}{s}} a(Q)^p w(Q) \\ \leq & K^p \|a\|^p \left(\frac{a(Q)}{t}\right)^{p+\frac{p}{s}} w(Q). \end{aligned}$$

Hemos probado:

$$\sup_{t>a(Q)} t\left(\frac{1}{w(Q)} w\left(\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > t\}\right)\right)^{\frac{1}{p\left(1+\frac{1}{s}\right)}} \leq c_n \left(K \|a\|\right)^{\frac{s}{s+1}} a(Q).$$

Demostración

La otra estimación es trivial,

$$\sup_{t\leq a(Q)} t\left(\frac{1}{w(Q)}w\left(\{x\in Q:|f(x)-f_Q|>t\}\right)\right)^{\frac{1}{p\left(1+\frac{1}{s}\right)}}\leq a(Q).$$

Demostración

La otra estimación es trivial,

$$\sup_{t\leq a(Q)} t\left(\frac{1}{w(Q)}w\left(\{x\in Q:|f(x)-f_Q|>t\}\right)\right)^{\frac{1}{p\left(1+\frac{1}{s}\right)}}\leq a(Q).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\|f-f_Q\|_{L^{p\left(1+\frac{1}{s}\right),\infty}\left(Q,\frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} &= \sup_{t>0} t\left(\frac{1}{w(Q)}w\left(\{x\in Q:|f(x)-f_Q|>t\}\right)\right)^{\frac{1}{p\left(1+\frac{1}{s}\right)}}\\ &= \max\left\{\sup_{t\leq a(Q)}\cdots,\sup_{t>a(Q)}\cdots\right\}\\ &\leq \max\left\{c_n a(Q), c_n\left(K\|a\|\right)^{\frac{s}{s+1}}a(Q)\right\}\\ &= c_n\max\left\{1,\left(K\|a\|\right)^{\frac{s}{s+1}}\right\}a(Q).\end{aligned}$$

□

Aplicaciones: Automejora con normas Lorentz

Usando la desigualdad de Kolmogorov, para cada $0 < q < \infty$ tenemos,

$$\|f - f_Q\|_{L^{p,q}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} (1+s)^{\frac{1}{q}} \|f - f_Q\|_{L^{p\left(1+\frac{1}{s}\right),\infty}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)}.$$

Aplicaciones: Automejora con normas Lorentz

Usando la desigualdad de Kolmogorov, para cada $0 < q < \infty$ tenemos,

$$\|f - f_Q\|_{L^{p,q}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} (1+s)^{\frac{1}{q}} \|f - f_Q\|_{L^{p\left(1+\frac{1}{s}\right),\infty}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)}.$$

Corollary (C., Pérez)

Sea $a \in SD_p^s(w)$ con $w \in A_\infty$. Sea $f \in L^1_{loc}$ tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq a(Q), \qquad \text{for all cube } Q.$$

Entonces para cada $0 < q < \infty$ y cada cubo Q,

$$\|f - f_Q\|_{L^{p,q}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq c_n p \left(1 + \frac{1}{s}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} (1+s)^{\frac{1}{q}} \|a\|^{\frac{s}{s+1}} [w]_{A_\infty} a(Q).$$

Aplicaciones: Automejora con normas Lorentz

Usando la desigualdad de Kolmogorov, para cada $0 < q < \infty$ tenemos,

$$\|f - f_Q\|_{L^{p,q}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} (1+s)^{\frac{1}{q}} \|f - f_Q\|_{L^{p\left(1+\frac{1}{s}\right),\infty}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)}.$$

Corollary (C., Pérez)

Sea $a \in SD_p^s(w)$ con $w \in A_\infty$. Sea $f \in L^1_{loc}$ tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq a(Q), \qquad \text{for all cube } Q.$$

Entonces para cada $0 < q < \infty$ y cada cubo Q,

$$\|f - f_Q\|_{L^{p,q}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq c_n p \left(1 + \frac{1}{s}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} (1+s)^{\frac{1}{q}} \|a\|^{\frac{s}{s+1}} [w]_{A_\infty} a(Q).$$

- En el caso $q = p$, mejoramos el exponente de $(1+s)$ de [LLO22].

Aplicaciones: Desigualdades P-S con normas Lorentz

Theorem (C., Pérez)

Sea $1 < p < n$, *sea* $w \in A_r$ *con* $1 \leq r \leq p$ *y* $[w]_{A_r} > 1$ **(no trivial)**, *y sea* p_w^* *definido como*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p_w^*} = \frac{1}{n\left(r + \log[w]_{A_r}\right)}.$$

Entonces, existe C_n *tal que*

$$\|f - f_Q\|_{L^{p_w^*,1}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq C_n [w]_{A_p}^{\frac{1}{p}} B_{w,r} \ell(Q) \|\nabla f\|_{L^{p,p_w^*}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)}$$

para todo cubo Q, *donde* $B_{w,r}$ *es una constante que explota de la siguiente manera*

$$B_{w,r} \approx \frac{1}{\left([w]_{A_r} - 1\right)^2}.$$

cuando $[w]_{A_r} \to 1^+$.

Aplicaciones: Desigualdades P-S fraccionarias

Theorem

Sean $1 \leq p < \infty$ *y* $\delta \in (0,1)$. *Entonces, para todo cubo* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *y toda* $f \in W^{\delta,p}_{loc}$, *tenemos*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq c_n \ell(Q)^\delta \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\int_Q \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}}dy\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicaciones: Desigualdades P-S fraccionarias

Theorem

Sean $1 \leq p < \infty$ y $\delta \in (0,1)$. Entonces, para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ y toda $f \in W^{\delta,p}_{loc}$, tenemos

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq c_n \ell(Q)^\delta \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\int_Q \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}}dy\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq & \frac{1}{|Q|^2}\int_Q\int_Q |f(x)-f(y)|dy\,dx \\
& \leq \left(\frac{1}{|Q|^2}\int_Q\int_Q |f(x)-f(y)|^p dy\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
& = \ell(Q)^\delta \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\int_Q \frac{|f(x)-f(y)|^p}{\ell(Q)^{n+\delta p}}dy\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq c_n \ell(Q)^\delta \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\int_Q \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}}dy\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Aplicaciones: Desigualdades P-S fraccionarias

- Bourgain-Brezis-Mironescu (2001)

$$\lim_{\delta\uparrow 1}(1-\delta)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}}dy\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = K_{n,p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicaciones: Desigualdades P-S fraccionarias

- Bourgain-Brezis-Mironescu (2001)

$$\lim_{\delta\uparrow 1}(1-\delta)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}}dy\,dx\right)^{\frac{1}{p}}=K_{n,p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Bourgain-Brezis-Mironescu (2001), Milman (2005)

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx\leq c_n(1-\delta)^{\frac{1}{p}}\ell(Q)^{\delta}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\int_Q\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}}dy\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicaciones: Desigualdades P-S fraccionarias

- Bourgain-Brezis-Mironescu (2001)

$$\lim_{\delta\uparrow 1}(1-\delta)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}}dy\,dx\right)^{\frac{1}{p}}=K_{n,p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Bourgain-Brezis-Mironescu (2001), Milman (2005)

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx\leq c_n(1-\delta)^{\frac{1}{p}}\ell(Q)^{\delta}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\int_Q\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}}dy\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Myyryläinen-Pérez-Weigt (2023). Sea $w\in A_p$,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leq c_n\delta^{\frac{1}{p}-1}(1-\delta)^{\frac{1}{p}}[w]_{A_p}^{\frac{1}{p}}\ell(Q)^{\delta}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q\int_Q\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}}dy\,w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicaciones: Desigualdades P-S fraccionarias

Theorem (C., Pérez)

Sean $0 < \delta < 1$ *y* $1 \leq p < \frac{n}{\delta}$. *Sea* $w \in A_r$ *con* $1 \leq r \leq p$ *y* $[w]_{A_r} > 1$, *y sea* $p^*_{\delta,w}$ *definido por*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*_{\delta,w}} = \frac{\delta}{n(r + \log[w]_{A_r})}.$$

Entonces, existe $C_n > 0$ *tal que*

$$\|f - f_Q\|_{L^{p^*_{\delta,w},1}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq C_n \delta^{\frac{1}{p}-2}(1-\delta)^{\frac{1}{p}}[w]_{A_p}^{1+\frac{1}{p}} B_{w,r} \cdot$$

$$\cdot \ell(Q)^{\delta} \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q \int_Q \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}} dy\, w(x)dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo cubo Q, *donde* $B_{w,r} \approx \frac{1}{[w]_{A_r} - 1}$ *cuando* $[w]_{A_r} \to 1^+$.

.

Section 3

Desigualdades de Poincaré-Sobolev via integración fraccionaria

Desigualdad de Poincaré-Sobolev

Theorem

Sea $n \geq 2$ y $1 \leq p < n$. Existe $c_{n,p} > 0$ tal que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq c_{n,p} \ell(Q) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |\nabla f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f$, y $p^* = \frac{np}{n-p}$ ($\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} = \frac{1}{n}$).

Desigualdad de Poincaré-Sobolev

Proof.

Sea $1 \leq p < n$,

$$\begin{aligned}
\|f - f_Q\|_{L^{p^*,\infty}(Q,\frac{dx}{|Q|})} \leq & c_n \|I_1(|\nabla f|\chi_Q)\|_{L^{p^*,\infty}(Q,\frac{dx}{|Q|})} \\
= & c_n \frac{\ell(Q)}{|Q|^{\frac{1}{p}}} \|I_1(|\nabla f|\chi_Q)\|_{L^{p^*,\infty}(Q,dx)} \\
\leq & c_{n,p}\ell(Q)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Desigualdad de Poincaré-Sobolev

Proof.

Sea $1 \leq p < n$,

$$\begin{aligned}\|f - f_Q\|_{L^{p^*,\infty}(Q,\frac{dx}{|Q|})} \leq & c_n \|I_1(|\nabla f|\chi_Q)\|_{L^{p^*,\infty}(Q,\frac{dx}{|Q|})} \\ = & c_n \frac{\ell(Q)}{|Q|^{\frac{1}{p}}} \|I_1(|\nabla f|\chi_Q)\|_{L^{p^*,\infty}(Q,dx)} \\ \leq & c_{n,p}\ell(Q)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Usando el **método del truncamiento (Maz'ya 85)**,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_{n,p}\ell(Q)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\nabla f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Integrales fraccionarias y pesos A_p

Motivado por un trabajo de Alberico, Cianchi y Sbordone (2009).

Theorem (C.)

Sea $1 < p < \frac{n}{\alpha}$. *Sea* $w \in A_r$ *con* $1 \leq r \leq p$. *Definimos* q_r *como*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q_r} = \frac{\alpha}{n}\frac{1}{r},$$

Entonces, existe $c_n > 0$ *tal que*

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |I_\alpha f|^{q_r} w\right)^{\frac{1}{q_r}} \leq C\frac{p^*_\alpha}{\alpha}[w]_{A_r}^{\frac{1}{p}}[\sigma]_{A_\infty}^{\frac{1}{q_r}}\ell(Q)^\alpha \left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f|^p w\right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ *y toda función* $f \in L^p(Q, w)$.

Integrales fraccionarias y pesos A_p

Theorem (C.)

Sea $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$. *Sea* $w \in A_r$ *con* $1 \leq r \leq p$. *Definimos* q_r *como*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q_r} = \frac{\alpha}{n}\frac{1}{r},$$

Entonces, existe $c_n > 0$ *tal que*

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q_r,\infty}\left(Q,\frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq \frac{c_n}{\alpha} p_\alpha^* [w]_{A_r}^{\frac{1}{p}} \ell(Q)^\alpha \left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f|^p w\right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ *y toda función* $f \in L^p(Q, w)$.

Desigualdad de Hedberg con pesos

Lemma (C.)

Sea $1 < p < \frac{n}{\alpha}$. *Dado* $1 < r \leq p$ *definimos* q *como*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}\frac{1}{r}.$$

Entonces existe $c_n > 0$ *tal que para todo cubo* Q *tal que* $0 < \int_Q w(y)^{1-r'}\,dy < \infty$ *y toda función* $f \in L^p(Q, w)$, *tenemos*

$$|I_\alpha f(x)| \leq \frac{c_n}{\alpha} p_\alpha^* M f(x)^{\frac{p}{q}} \, \|f\|_{L^p(Q,w)}^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_Q w(y)^{1-r'}\,dy \right)^{\frac{\alpha}{nr'}},$$

para todo $x \in Q$.

Desigualdades de Poincaré-Sobolev con pesos A_p

Theorem (C.)

Sea $1 \leq p < n$. *Sea* $w \in A_r$ *con* $1 \leq r \leq p$. *Definimos* q_r *como*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q_r} = \frac{1}{n}\frac{1}{r},$$

Entonces, existe $c_n > 0$ *tal que*

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f - f_Q|^{q_r} w\right)^{\frac{1}{q_r}} \leq c_n p^* [w]_{A_r}^{\frac{1}{p}} \ell(Q) \left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f|^p w\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo cubo Q. *Además, el exponente* $\frac{1}{p}$ *en la constante* A_r *es* **óptimo**.

Desigualdades de Poincaré-Sobolev con pesos A_p

Theorem (C.)

Sea $1 \leq p < n$. Sea $w \in A_r$ con $1 \leq r \leq p$. Definimos q_r como

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q_r} = \frac{1}{n}\frac{1}{r},$$

Entonces, existe $c_n > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f - f_Q|^{q_r} w\right)^{\frac{1}{q_r}} \leq c_n p^* [w]_{A_r}^{\frac{1}{p}} \ell(Q) \left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f|^p w\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo cubo Q. Además, el exponente $\frac{1}{p}$ en la constante A_r es **óptimo**.

- El caso $r = 1$ ($w \in A_1$) resuelve una conjetura de Pérez-Rela (2019) sobre el exponente óptimo en la constante A_1 en esta desigualdad.

Aplicaciones: Desigualdades fraccionarias

Theorem (C.)

Sean $n \geq 2$, $\delta \in (0,1)$, $1 \leq p < \frac{n}{\delta}$ y sea $w \in A_1$. Entonces, existe una constante dimensioanal $c_n > 0$ tal que,

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f - f_Q|^{p\left(\frac{n}{\delta}\right)'} w\right)^{\frac{1}{p\left(\frac{n}{\delta}\right)'}} \leq c_n (1-\delta)^{\frac{1}{p}} [w]_{A_1}^{\frac{1}{p}} \ell(Q)^{\delta} \cdot \left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q \int_Q \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}} dy\, w(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo cubo Q.

Aplicaciones: Desigualdades P-S con derivadas de orden superior

- Dado un cubo Q y $m \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{P}_{m-1}(Q)$ el espacio de polinomios en Q de grado menor o igual que $m-1$ en n variables.

Aplicaciones: Desigualdades P-S con derivadas de orden superior

- Dado un cubo Q y $m \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{P}_{m-1}(Q)$ el espacio de polinomios en Q de grado menor o igual que $m-1$ en n variables.
- Denotamos por $P_Q^{m-1} f$ a la proyección de f en el espacio $\mathcal{P}_{m-1}(Q)$.

Aplicaciones: Desigualdades P-S con derivadas de orden superior

- Dado un cubo Q y $m \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{P}_{m-1}(Q)$ el espacio de polinomios en Q de grado menor o igual que $m-1$ en n variables.
- Denotamos por $P_Q^{m-1} f$ a la proyección de f en el espacio $\mathcal{P}_{m-1}(Q)$.
-

$$\inf_{\pi \in \mathcal{P}_{m-1}(Q)} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - \pi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \approx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - P_Q^{m-1} f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Aplicaciones: Desigualdades P-S con derivadas de orden superior

- Dado un cubo Q y $m \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{P}_{m-1}(Q)$ el espacio de polinomios en Q de grado menor o igual que $m-1$ en n variables.
- Denotamos por $P_Q^{m-1} f$ a la proyección de f en el espacio $\mathcal{P}_{m-1}(Q)$.
-

$$\inf_{\pi \in \mathcal{P}_{m-1}(Q)} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - \pi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \approx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - P_Q^{m-1} f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Theorem

Sea $m \in \mathbb{N}$ con $m < n$. Existe $C = C(n,m) > 0$ tal que

$$|f(x) - P_Q^{m-1} f(x)| \leq C I_m(|\nabla^m f| \chi_Q)(x),$$

para casi todo $x \in Q$, donde $|\nabla^m f| = \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha f|$.

Aplicaciones: Desigualdades P-S con derivadas de orden superior

Theorem (C.)

Sean $n \geq 2$, $m \geq 1$ y $1 \leq p < \frac{n}{m}$. Sea $w \in A_r$ con $1 \leq r \leq p$ y consideremos q_r definido como

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q_r} = \frac{m}{n}\frac{1}{r}.$$

Entonces, existe $C = C(n,m) > 0$ tal que,

$$\left\| f - P_Q^{m-1} f \right\|_{L^{q_r,\infty}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq C p_m^* [w]_{A_r}^{\frac{1}{p}} \ell(Q)^m \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q |\nabla^m f|^p w \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo cubo Q.

Aplicaciones: Desigualdades P-S con derivadas de orden superior

Theorem (C.)

Sean $n \geq 2$, $m \geq 1$ y $1 \leq p < \frac{n}{m}$. Sea $w \in A_r$ con $1 \leq r \leq p$ y consideremos q_r definido como

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q_r} = \frac{m}{n}\frac{1}{r}.$$

Entonces, existe $C = C(n,m) > 0$ tal que,

$$\left\| f - P_Q^{m-1} f \right\|_{L^{q_r,\infty}\left(Q, \frac{w(x)dx}{w(Q)}\right)} \leq C p_m^* [w]_{A_r}^{\frac{1}{p}} \ell(Q)^m \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q |\nabla^m f|^p w \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo cubo Q.

- El método del truncamiento **no** funciona en este contexto!

Aplicaciones: Desigualdades P-S con derivadas de orden superior

Theorem (C.)

Sean $n \geq 2$, $m \geq 1$ y $1 < p < \frac{n}{m}$. Sea $w \in A_r$ con $1 \leq r \leq p$ y consideremos q_r definido como

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q_r} = \frac{m}{n}\frac{1}{r}.$$

Entonces, existe $C = C(n,m) > 0$ tal que,

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f - P_Q^{m-1} f|^{q_r} w\right)^{\frac{1}{q_r}} \leq C p_m^* [w]_{A_r}^{\frac{1}{p}} [\sigma]_{A_\infty}^{\frac{1}{q_r}} \ell(Q)^m \left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla^m f|^p w\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo cubo Q.

Exponente de Sobolev con peso p_w^*

Definition

Dado $w \in A_\infty$, definimos

$$I(w) := \{p \geq 1 : w \in A_p\}$$

Exponente de Sobolev con peso p_w^*

Definition

Dado $w \in A_\infty$, definimos

$$I(w) := \{p \geq 1 : w \in A_p\} = \begin{cases} [1, \infty) & \text{if } w \in A_1 \end{cases}$$

Exponente de Sobolev con peso p_w^*

Definition

Dado $w \in A_\infty$, definimos

$$I(w) := \{p \geq 1 : w \in A_p\} = \begin{cases} [1, \infty) & \text{if } w \in A_1 \\ (\ell_w, \infty) & \text{if } w \in A_\infty \setminus A_1 \end{cases},$$

donde $\ell_w := \inf I(w)$.

Exponente de Sobolev con peso p_w^*

Definition

Dado $w \in A_\infty$, definimos

$$I(w) := \{p \geq 1 : w \in A_p\} = \begin{cases} [1, \infty) & \text{if } w \in A_1 \\ (\ell_w, \infty) & \text{if } w \in A_\infty \setminus A_1 \end{cases},$$

donde $\ell_w := \inf I(w)$.

- Hagelstein, Parissis (2016): $\ell_w < e^{c_n [w]_{A_\infty}}$.

Exponente de Sobolev con peso p_w^*

Definition

Dado $w \in A_\infty$, definimos

$$I(w) := \{p \geq 1 : w \in A_p\} = \begin{cases} [1, \infty) & \text{if } w \in A_1 \\ (\ell_w, \infty) & \text{if } w \in A_\infty \setminus A_1 \end{cases},$$

donde $\ell_w := \inf I(w)$.

- Hagelstein, Parissis (2016): $\ell_w < e^{c_n [w]_{A_\infty}}$.

Definition

Sean $n \geq 2$, $1 \leq p < n$ y $w \in A_\infty$. Definimos el exponente de Sobolev con peso p_w^* como

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p_w^*} = \frac{1}{n} \frac{1}{\ell_w}.$$

Exponente de Sobolev con peso p_w^*

Corollary (C.)

Sean $1 \leq p < n\ell_w$ *y* $w \in A_p$. *Entonces, para cada* $1 \leq q < p_w^*$, *tenemos*

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(x)-f_Q|^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_w \ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo cubo Q, *donde la constante* $C_w = c_n p^* [w]_{A_r}^{\frac{1}{p}}$ *para algún* $r = r(q) > \ell_w$.

Exponente de Sobolev con peso p_w^*

Corollary (C.)

Sean $1 \leq p < n\ell_w$ y $w \in A_p$. Entonces, para cada $1 \leq q < p_w^*$, tenemos

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(x)-f_Q|^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_w \ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo cubo Q, donde la constante $C_w = c_n p^* [w]_{A_r}^{\frac{1}{p}}$ para algún $r = r(q) > \ell_w$.

Theorem (C.)

Podemos encontrar un peso $w \in A_p$ tal que si la desigualdad

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(x)-f_Q|^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_w \ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

es cierta para toda función Lipschitz f, entonces $q \leq p_w^*$.

Exponente de Sobolev con peso p_w^*

Corollary (C.)

Sean $1 \leq p < n\ell_w$ y $w \in A_p$. Entonces, para cada $1 \leq q < p_w^*$, tenemos

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(x)-f_Q|^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_w \ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo cubo Q, donde la constante $C_w = c_n p^* [w]_{A_r}^{\frac{1}{p}}$ para algún $r = r(q) > \ell_w$.

Theorem (C.)

Podemos encontrar un peso $w \in A_p$ tal que si la desigualdad

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(x)-f_Q|^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_w \ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

es cierta para toda función Lipschitz f, entonces $q \leq p_w^*$.

- **No** sabemos si la desigualdad es cierta en el extremo $q = p_w^*$.

Muchas gracias!