Facultad de Ciencias
uma.es

Convergencia Cesàro α en Teoría Ergódica

Cesàro α convergence in Ergodic Theory

Tema: Análisis Real

Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas

Autor: **Alejandro Claros Pérez**

Tutor: **Francisco Javier Martín Reyes**

Área de conocimiento y/o departamento: **Análisis Matemático, Estadística e Investigación operativa y Matemática aplicada.**

Junio 2019

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD DEL TFG

D./Dña. *Alejandro Claros Pérez*, con DNI *09081258F*, estudiante del Grado en *Matemáticas* de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Málaga,
DECLARO:

Que he realizado el Trabajo Fin de Grado titulado "*Convergencia Cesàro α en Teoría Ergódica*" y que lo presento para su evaluación. Dicho trabajo es original y todas las fuentes bibliográficas utilizadas para su realización han sido debidamente citadas en el mismo.

Para que así conste, firmo la presente en Málaga, el *24 de junio de 2019*



Es un placer para mi agradecer al Profesor D. Francisco Javier Martín Reyes por su inestimable ayuda, su constante dedicación y sus enseñanzas durante la realización de este trabajo.

Índice general

Resumen v

Abstract v

Introducción v

1. Teoremas Ergódicos 1
1. Transformaciones que conservan la medida . . . 1
2. Transformaciones ergódicas . . . 4
3. Teorema ergódico maximal . . . 6
4. Teorema individual ergódico . . . 10
   4.1. Descomposición de $L^2(\mu)$ . . . 10
   4.2. Teorema individual ergódico en $L^2(\mu)$ . . . 11
   4.3. Teorema individual ergódico en $L^p(\mu)$ . . . 12
   4.4. Identificación del límite . . . 14
5. Teorema ergódico en media . . . 15

2. Convergencia Cesàro α 17
1. Métodos de convergencia . . . 17
2. Convergencia Cesàro generalizada . . . 19
   2.1. Propiedades de la convergencia Cesàro α . . . 23
   2.2. Sumabilidad Cesàro α . . . 27
3. Teoremas Tauberianos . . . 28

3. Espacios de Lorentz $L(p,q)$ 29
1. Función de distribución y reordenamiento decreciente . . . 29
   1.1. Reordenamiento decreciente y normas p . . . 34
   1.2. Desigualdad de Hardy-Littlewood . . . 35
2. Espacios de Lorentz $L(p,q)$ . . . 35
3. Operadores de tipo débil restringido . . . 39

4. Convergencia de medias Cesàro α ergódicas 41
1. Función maximal ergódica . . . 42
2. Convergencia en casi todo punto . . . 49
   2.1. Descomposición de $L^p(\mu)$ . . . 49
   2.2. Convergencia en $L^p(\mu)$ . . . 50
   2.3. Convergencia en $L(\frac{1}{\alpha},1)$ . . . 54
3. Convergencia en norma y en medida . . . 55
4. Necesidad del espacio $L(\frac{1}{\alpha},1)$ . . . 56

A. Función maximal de Hardy-Littlewood **59**

Bibliografía **60**

Convergencia Cesàro α en Teoría Ergódica

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo principal estudiar la convergencia Cesàro α en Teoría Ergódica, con $0 < \alpha \leq 1$. Para ello, en el primer capítulo se estudian las transformaciones que conservan la medida, y se prueban los resultados clásicos de Teoría Ergódica como el teorema de Birkhoff y el teorema de Von Neumann; estos resultados se refieren a la convergencia de medias aritméticas.

Una vez se ha estudiado la convergencia en medias aritméticas, buscamos procesos de convergencia más fuertes. El segundo capítulo está dedicado a estudiar nuevos procesos de convergencia, en particular, se introduce la convergencia Cesàro α y se prueban sus propiedades.

En el siguiente capítulo se introducen los espacios de Lorentz $L(p, q)$, que son los espacios naturales a la hora de estudiar la convergencia Cesàro α en Teoría Ergódica. Para ello primero se estudian la función de distribución y el reordenamiento decreciente de una función medible.

El último capítulo se dedica a probar la convergencia Cesàro α de las medias ergódicas. En primer lugar se estudia el operador maximal asociado a estas medias. Los resultados obtenidos para este operador permiten estudiar la convergencia en casi todo punto. El trabajo finaliza estudiando la convergencia en norma y la convergencia en medida de las medias Cesàro α ergódicas.

Palabras clave:

Ergódico, Teoremas ergódicos, transformaciones que conservan la medida, transformaciones ergódicas, Convergencia cesàro α, reordenamiento decreciente, espacios de Lorentz

Cesàro α convergence in Ergodic Theory

Abstract

The main objective of this work is to study the Cesàro α convergence in ergodic theory, with $0 < \alpha \leq 1$. In the first chapter, we study measure preserving transformations, and we prove the classic results in Ergodic Theory, such as Birkhoff's theorem and Von Neumann's theorem; these results refer to the convergence of arithmetic averages.

Once the convergence of arithmetic averages has been studied, we research stronger convergence processes. The second chapter is dedicated to studying new convergence methods, in particular, the Cesàro α convergence is introduced and its properties are proven.

In the next chapter, we introduce the Lorentz $L(p, q)$ spaces, which are the natural spaces to study the Cesàro α convergence in Ergodic Theory. For this purpose, the distribution function and the decreasing rearrangement of a measurable function is first studied.

The last chapter is dedicated to proving Cesàro α convergence of ergodic averages. Firstly, we study the maximal operator associated with these averages, the results obtained for this operator allow to study convergence almost everywhere. The work concludes by studying convergence in the norm and convergence in measure of the Cesàro α ergodic averages.

Key words:

Ergodic, ergodic theorems, measure preserving transformation, ergodic transformation, Cesaro α convergence , decreasing rearrangement, Lorentz spaces

Introducción

La Teoría Ergódica tiene su origen en la mecánica estadística. Para ver esto, consideremos un sistema de N partículas en un espacio tridimensional. Para cada instante de tiempo t podemos representar el estado del sistema como un punto de $\mathbb{R}^{6N}$, ya que para cada partícula tenemos las tres coordenadas del vector de posición y las tres del vector momento. En estas condiciones a $\mathbb{R}^{6N}$ se le llama espacio de fases del sistema.

Sea n el número de grados de libertad del sistema, entonces podemos escoger unas coordenadas adecuadas, las coordenadas generalizadas $q = (q_1, ..., q_n)$ y los momentos generalizados $p = (p_1, ..., p_n)$, en estas condiciones el espacio de fases es $\mathbb{R}^{2n}$. Se define el Hamiltoniano del sistema como

$$\mathcal{H}(q, p) = K(p) + U(q),$$

donde K es la energía cinética y U la energía potencial. Las ecuaciones de la mecánica Hamiltoniana rigen la evolución del sistema, y son

$$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}$$

para $i = 1, ..., n$. Si $\mathcal{H}$ es suficientemente regular, para cada estado inicial del sistema (q, p), existe una única solución de las ecuaciones de Hamilton, que denotaremos $T_\cdot(q, p) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $t \mapsto T_t(q, p)$, y representa el estado del sistema para cualquier tiempo t. De esta forma, si t_0 es un tiempo fijo, entonces T_{t_0} es una trasformación del espacio de fases en si mismo, con las siguientes propiedades $T_0 = Id$, y $T_t \circ T_s = T_{t+s}$. Obtenemos así un flujo de parámetro continuo $\{T_t : t \in \mathbb{R}\}$ en el espacio de fases $\mathbb{R}^{2n}$.

Uno de los resultados fundamentales de la mecánica estadística es el teorema de Liouville, que asegura que el flujo $\{T_t : t \in \mathbb{R}\}$ deja los volúmenes de $\mathbb{R}^{2n}$ invariantes. En otras palabras, las transformaciones T_t conservan la medida. La mecánica determinista nos dice que si conocemos el estado inicial de un sistema entonces podemos conocer la evolución futura y pasada del mismo. En la práctica nunca se tiene suficiente información para ello. La idea de la mecánica estadística es abandonar el estudio determinista de un estado, que es un punto del espacio de fases, y dedicarse al estudio estadístico de un conjunto de estados, es decir, un subconjunto del espacio de fases. La cuestión de mayor interés en mecánica estadística es el comportamiento asintótico del sistema, es decir, el comportamiento del sistema cuando el tiempo tiende a infinito.

Para simplificar, vamos a pasar del caso continuo que hemos expuesto al caso discreto. Sea $\tau = T_{t_0}$ para un cierto tiempo inicial t_0, entonces por las propiedades del flujo tenemos

que $\tau^n = T_{nt_0}$ para todo entero n. Es razonable pensar que las propiedades asintóticas de T_t cuando $t \to \infty$ son esencialmente las mismas que las de τ^n cuando $n \to \infty$.

A partir de ahora consideremos un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, donde X será el espacio de fases, y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida, que representará la evolución del sistema en un instante de tiempo. Supongamos que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función medible, podemos pensar que la sucesión $\{f(\tau^n(x))\}_{n=0}^{\infty}$ representa una variable física interesante en estados de tiempo sucesivos. Como veremos en el capítulo 1 esta sucesión, en general, no es convergente; por tanto, estudiaremos procesos de convergencia más débiles.

En el primer capítulo se introduce el concepto de transformación que conserva la medida, y se prueban algunas propiedades. Seguidamente se dan algunos ejemplos de estas transformaciones y se demuestra el teorema de recurrencia de Poincaré. En la siguiente sección se introducen las transformaciones ergódicas, y se prueba que si τ es una transformación ergódica que conserva la medida entonces la sucesión $\{f(\tau^n(x))\}_{n=0}^{\infty}$ no es convergente en general. Por lo tanto, en el resto del capítulo se estudia la convergencia en medias aritméticas de la sucesión $\{f(\tau^n(x))\}_{n=0}^{\infty}$, que, como sabemos, es un proceso de convergencia más débil que la convergencia usual. Es más débil en el siguiente sentido:

Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente con límite a, entonces la sucesión de medias aritméticas $\left\{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right\}$ tiene límite a, y el recíproco no es cierto.

Esta convergencia se la llama usualmente convergencia Cesàro. Dada una transformación $\tau : X \longrightarrow X$ que conserva la medida y una función medible $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ vamos a estudiar la convergencia de las medias

$$A_n f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k(x)). \tag{1}$$

La tercera sección está dedicada a estudiar la función maximal asociada a las medias $A_n f$,

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_n A_n|f|(x),$$

esto será clave a la hora de probar la convergencia en casi todo punto de $A_n f$. En la siguiente sección se prueba que si $f \in L^p(\mu)$ con $1 \leq p < \infty$, entonces las medias $A_n f$ convergen en casi todo punto. Bajo la hipótesis adicional de que τ sea ergódica podremos calcular explícitamente el límite de dichas medias. En la última sección se estudia la convergencia en $L^p(\mu)$, y como consecuencia inmediata se obtiene la convergencia en medida.

En el segundo capítulo se introducen nuevos procesos de convergencia, se generaliza la convergencia Cesàro y se define un nuevo proceso de convergencia (C, α) para cada número real $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, de la siguiente manera,

Una sucesión $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ se dice que es convergente Cesàro α con límite s, si

$$\frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} s_k \longrightarrow s$$

cuando $n \to \infty$, donde $A_0^{\alpha} = 1$ y $A_n^{\alpha} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!} \equiv \binom{n+\alpha}{n}$.

Como casos particulares de esta definición tenemos que la convergencia $(C,0)$ es la convergencia usual de sucesiones, y la convergencia en medias aritméticas estudiada en el capítulo 1 es la convergencia $(C,1)$.

En la primera mitad de este capítulo se prueban las propiedades de este método de convergencia, por ejemplo cabe destacar que si una sucesión es convergente (C,α), entonces es convergente $(C,\alpha+h)$ para todo $h>0$. Como consecuencia de esto podemos observar que los procesos de convergencia (C,α) con $0<\alpha<1$ son más débiles que la convergencia usual, pero sin embargo son más fuertes que la convergencia Cesàro estudiada en el capítulo 1. El capítulo finaliza viendo la relación que tiene la convergencia Cesàro α con la teoría de sumabilidad de series, y se exponen algunos teoremas tauberianos sin demostración.

El objetivo final de este trabajo es estudiar la convergencia Cesàro α en Teoría Ergódica para $0<\alpha<1$. Para ello primero debemos introducir los espacios naturales a la hora de estudiar esta convergencia, los espacios de Lorentz. El tercer capítulo está dedicado a introducir los espacio de Lorentz $L(p,q)$. Para ello primero se define la función de distribución asociada a una función medible $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}),$$

y se prueban algunas de sus propiedades, como que es decreciente y continua por la derecha. Seguidamente se introduce el reordenamiento decreciente de f, que es la única función $f^*: [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ decreciente, continua por la derecha y equimedible con f, que viene definido por

$$f^*(t) = \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : \mu_f(\lambda) \leq t\}.$$

Un resultado muy importante de este capítulo es que la norma p de una función medible f solo depende de la función de distribución de f o de su reordenamiento decreciente

$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu_f(\lambda)d\lambda = \int_0^\infty f^*(t)^p dt. \tag{2}$$

Una vez tenemos la definición de reordenamiento decreciente estamos en las condiciones de definir los espacios de Lorentz $L(p,q)$, que es el conjunto de todas las clases de funciones medibles f tales que el funcional $\|f\|_{p,q} < \infty$, donde

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } 0<p<\infty, 0<q<\infty \\ \displaystyle\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & \text{si } 0<p\leq\infty, q=\infty \end{cases}.$$

Los espacios de Lorentz son una generalización de los espacios $L^p(\mu)$, ya que $L(p,p) = L^p(\mu)$ con igualdad de normas, debido a (2). En general $\|.\|_{p,q}$ no es una norma para todos p y q, pero sí es una cuasi-norma. El resto del capítulo está dedicado a probar algunas propiedades de estos espacios, entre ellas es interesante destacar la siguiente cadena de inclusiones

$$L(p,1) \subset L^p(\mu) \subset L(p,\infty).$$

El capítulo finaliza introduciendo algunos conceptos de la teoría de interpolación de operadores, tales como las definiciones de operador de tipo débil (p,q), fuerte (p,q) y débil restringido (p,q).

En el capítulo 4 se estudia la convergencia Cesàro α en teoría ergódica para $0 < \alpha \leq 1$. Dada una transformación $\tau : X \longrightarrow X$ que conserva la medida y una función medible $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, se definen las medias de Cesàro de orden α asociadas a la sucesión $\{f(\tau^n(x))\}$ como

$$R_n^\alpha f(x) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} f(\tau^k(x)), \tag{3}$$

donde $A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}$ y $A_0^\alpha = 1$.

En la primera sección se estudia la función maximal asociada a $R_n^\alpha f$,

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) = \sup_n R_n^\alpha |f|(x),$$

y se prueba que es de tipo débil restringido $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})$ y de tipo fuerte (∞, ∞). Mediante una interpolación obtenemos que el operador $\mathcal{M}_\alpha$ es de tipo fuerte (p, p) para $\frac{1}{\alpha} < p < \infty$.

La siguiente sección está dedicada al estudio de la convergencia en casi todo de $R_n^\alpha f$. Utilizando que $\mathcal{M}_\alpha$ es de tipo fuerte (p, p) robaremos que si $f \in L^p(\mu)$ con $\frac{1}{\alpha} < p < \infty$, entonces $R_n^\alpha f$ converge en casi todo punto. Utilizando un argumento de densidad y que $\mathcal{M}_\alpha$ es de tipo débil restringido $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})$ podremos probar que $R_n^\alpha f$ converge en casi todo punto para toda $f \in L(\frac{1}{\alpha}, 1)$. En la siguiente sección se estudia la convergencia en norma de las medias $R_n^\alpha f$ y la convergencia en medida.

El capítulo finaliza viendo que el espacio $L(\frac{1}{\alpha}, 1)$ es el mayor espacio invariante bajo reordenamiento para el que se tiene la convergencia en casi todo punto de $R_n^\alpha f$.

Por último se incluye un apéndice sobre la función maximal de Hardy-Littlewood, en el que se prueban algunas propiedades de la misma que son necesarias para el estudio de la función maximal $\mathcal{M}f$ del capítulo 1, esencialmente la desigualdad de tipo débil $(1, 1)$.

Este trabajo de fin de grado termina con la bibliografía, que incluye los libros, artículos y tesis que se han usado para elaborarlo, así como otros en los que se puede encontrar información sobre los resultados cuyas demostraciones no se han incluido en este trabajo. En particular hay que destacar los libros *Stein* [15], *Silva* [13] y Petersen [11], que han sido muy importantes a la hora de elaborar el primer capítulo. Para el segundo capítulo se ha seguido principalmente el libro de *Zygmund* [17] y en el tercer capítulo el libro de *Stein* y *Weiss* [14] y la tesina de Kristiansson [9]. Por último, para el cuarto capítulo se han seguido los trabajos de *Broise, Déniel* y *Derriennic* [2] y la tesis de Sarrión [12].

Capítulo 1

Teoremas Ergódicos

Este capítulo está dedicado a probar los teoremas ergódicos clásicos. En la primera sección se definen las transformaciones que conservan la medida y se prueban algunas propiedades de recurrencia. La siguiente sección está dedicada a las transformaciones ergódicas, que serán muy útiles a la hora de dar contraejemplos. El resto del capítulo está dedicado a probar los teoremas ergódicos clásicos, es decir, estudiar la convergencia en casi todo punto, en $L^p(\mu)$ y en medida de las medias ergódicas. Los resultados principales de este capítulo son el Teorema de recurrencia de Poincaré, el Teorema de Birkhoff y el Teorema de Von Neumann. Para elaborar este capítulo se han seguido los libros de *Stein* [15], *Petersen* [11], *Silva* [13], *Dajani* [3] y la tesina de *Millán* [10].

1. Transformaciones que conservan la medida

Definición 1.1. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ dos espacios de medida. Se dice que $\tau : X \longrightarrow Y$ es una **transformación que conserva la medida** si es medible y tal que $\mu(\tau^{-1}(E)) = \nu(E)$, para todo $E \in \mathcal{N}$.

Aunque esta definición tiene sentido para dos espacios de medida $(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$, nosotros estudiaremos el caso $X = Y$, esto nos permitirá poder iterar $\tau, \tau^2, ..., \tau^n$.

Teorema 1.2. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces $f \circ \tau : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible. Además, si $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es otra función medible tal que $f = g$ en casi todo punto, entonces $f \circ \tau = g \circ \tau$ en casi todo punto.*

Demostración: Observemos que $\tau^{-1}(\{x \in X : f(x) > \lambda\}) = \{x \in X : f(\tau(x)) > \lambda\}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y como τ conserva la medida, entonces $\mu(\{x \in X : f(x) > \lambda\}) = \mu(\{x \in X : f(\tau(x)) > \lambda\})$. Luego si f es medible, entonces $f \circ \tau$ es medible. Sean $A = \{x \in X : f \circ \tau(x) \neq g \circ \tau(x)\}$, $B = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$, entonces $A = \tau^{-1}(B)$, y, como τ conserva la medida tenemos $\mu(A) = \mu(\tau^{-1}(B)) = \mu(B) = 0$, ya que $f = g$ en casi todo punto. Esto prueba que $f = g$ en casi todo punto. □

Observación 1.3. Observemos que en la demostración anterior solo hemos usado que τ conserva la medida de los conjuntos de medida cero.

Teorema 1.4. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Si $f \in L^p(\mu)$ con $0 < p \leq \infty$, entonces $f \circ \tau \in L^p(\mu)$, y se verifica*

$$\|f \circ \tau\|_p = \|f\|_p . \tag{1.1}$$

Demostración: Sea M cota esencial de f, entonces $\mu(\{x \in X : f(\tau(x)) > M\}) = \mu(\{x \in X : f(x) > M\}) = 0$, luego M también es cota esencial de $f \circ \tau$. Recíprocamente, si M es cota esencial de $f \circ \tau$, entonces análogamente se prueba que M es cota esencial de f, luego $\|f \circ \tau\|_\infty = \|f\|_\infty$. Supongamos ahora $0 < p < \infty$.

1. Sea $\chi_E \in L^p(\mu)$. Se tiene $\chi_E(\tau(x)) = 1$ si y sólo si $\chi_{\tau^{-1}(E)}(x) = 1$, luego $\chi_E(\tau(x)) = \chi_{\tau^{-1}(E)}(x)$. Además,

$$\begin{aligned}\int_X \chi_E(\tau(x))^p d\mu(x) = \int_X \chi_{\tau^{-1}(E)}(x) d\mu(x) = \mu(\tau^{-1}(E)) \\ = \mu(E) = \int_X \chi_E(x)^p d\mu(x) < \infty.\end{aligned}$$

2. Sea $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i} \geq 0$ una función simple medible, y $f \in L^p(\mu)$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_X (f \circ \tau)^p d\mu = \int_X \sum_{i=1}^n a_i^p \chi_{\tau^{-1}(E_i)} d\mu = \sum_{i=1}^n a_i^p \mu(\tau^{-1}(E_i)) \\ = \sum_{i=1}^n a_i^p \mu(E_i) = \int_X f^p d\mu < \infty.\end{aligned}$$

3. Sea $f \geq 0$ medible, entonces existe una sucesión $\{s_n\}$ de funciones simples tales que $0 \leq s_n \uparrow f$. Entonces $s_n \circ \tau$ son medibles y $0 \leq s_n \circ \tau \uparrow f \circ \tau$. Aplicando dos veces el teorema de la convergencia monótona obtenemos

$$\begin{aligned}\int_X (f \circ \tau)^p d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} (s_n \circ \tau)^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (s_n \circ \tau)^p d\mu \\ = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n^p d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} s_n^p d\mu = \int_X f^p d\mu,\end{aligned}$$

   Luego si $f \in L^p(\mu)$, entonces $f \circ \tau \in L^p(\mu)$, y tienen la misma norma p.

4. Para funciones medibles arbitrarias, basta con aplicar lo anterior a f^+ y f^-. □

Por lo tanto, si definimos $T : L^p(\mu) \longrightarrow L^p(\mu)$, $T(f)(x) = f(\tau(x))$, en el Teorema 1.2 hemos probado que está bien definida y en el Teorema 1.4 que es una isometría, es decir, $\|T(f)\|_p = \|f\|_p$ para toda $f \in L^p(\mu)$. Además, hemos visto que $\mu(\{x \in X : f(x) > \lambda\}) = \mu(\{x \in X : f(\tau(x)) > \lambda\})$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego $f, f \circ \tau, ..., f \circ \tau^n$ son equimedibles (véase Proposición 3.6).

En el siguiente resultado vamos a ver que para probar que una aplicación conserva la medida, solo tenemos que probar que conserva la medida para una clase de conjuntos que generen la σ-álgebra, bajo ciertas condiciones.

Proposición 1.5. *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{N}, \mu_Y)$ dos espacios de medida, $\tau : X \longrightarrow Y$ una transformación que conserva la medida, y $\mathcal{E} \subset Y$ tal que $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{N}$. Supongamos que μ_Y es la única medida $\nu : \mathcal{N} \longrightarrow [0, \infty]$ tal que $\nu(E) = \mu_Y(E)$ para todo $E \in \mathcal{E}$. Entonces, $\mu_X(\tau^{-1}(E)) = \mu_Y(E)$ para todo $E \in \mathcal{E}$ si y sólo si $\mu_X(\tau^{-1}(B)) = \mu_Y(B)$ para todo $B \in \mathcal{N}$.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que $\mu_X(\tau^{-1}(E)) = \mu_Y(E)$ para todo $E \in \mathcal{E}$. Definimos la medida $\nu : \mathcal{N} \longrightarrow [0, \infty]$, dada por $\nu(B) = \mu_X(\tau^{-1}(B))$. Entonces, para cada $E \in \mathcal{E}$ tenemos

$$\nu(E) = \mu_X(\tau^{-1}(E)) = \mu_Y(E).$$

Entonces, como μ_Y es la única medida tal que $\nu(E) = \mu_Y(E)$ para todo $E \in \mathcal{E}$, tenemos que $\mu_Y(B) = \mu_X(\tau^{-1}(B))$ para todo $B \in \mathcal{N}$. La otra implicación es trivial. □

Proposición 1.6. *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ el espacio de medida completado. Si $\tau : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow (X, \mathcal{M}, \mu)$ una transformación que conserva la medida, entonces $\tau : (X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu}) \longrightarrow (X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ es una transformación que conserva la medida.*

Demostración: Sea $A \in \overline{\mathcal{M}}$. Entonces $A = E \cup F$ donde $E \in \mathcal{M}$, $F \subset N \in \mathcal{M}$ con $\mu(N) = 0$, y por definición de la medida completada $\overline{\mu}(A) = \mu(E)$. Como τ conserva la medida en $(X, \mathcal{M}, \mu)$, entonces $\tau^{-1}(E), \tau^{-1}(N) \in \mathcal{M}$, y $\mu(\tau^{-1}(N)) = \mu(N) = 0$. Luego, $\tau^{-1}(A) = \tau^{-1}(E) \cup \tau^{-1}(F)$ con $\tau^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ y $\tau^{-1}(F) \subset \tau^{-1}(N)$ con $\mu(\tau^{-1}(N)) = 0$, esto prueba que $\tau^{-1}(A) \in \overline{\mathcal{M}}$, con lo que queda probada la medibilidad de $\tau : (X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu}) \longrightarrow (X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$. Además, $\overline{\mu}(\tau^{-1}(A)) = \mu(\tau^{-1}(E)) = \mu(E) = \overline{\mu}(A)$, luego conserva la medida. □

Por lo tanto, a la hora de probar que una transformación $\tau : (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}, m) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}, m)$ conserva la medida de Lebesgue, basta con probar que $\tau : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, m) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, m)$ conserva la medida sobre los borelianos.

Ejemplo 1.7.

1. Sea $X = \mathbb{Z}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ y μ la medida contadora. La aplicación $\tau : n \mapsto n + 1$ es una transformación que conserva la medida.

2. Sea $X = \mathbb{R}^n$ y μ la medida de Lebesgue. Sea $\tau : x \mapsto x + h$ para $h \in \mathbb{R}^n$ fijado. Como la medida de Lebesgue es invariante frente a traslaciones entonces τ es una transformación que conserva la medida.

3. Sea $X = (0, 1]$ y μ la medida de Lebesgue. La aplicación $\tau : x \mapsto 2x \bmod 1$ es una transformación que conserva la medida. Basta observar que $\tau^{-1}(a, b] = (\frac{a}{2}, \frac{b}{2}] \cup (\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}]$, y por tanto $\mu(\tau^{-1}(a, b]) = b - a = \mu((a, b])$. Entonces, aplicando las proposiciones 1.5 y 1.6 obtenemos que τ conserva la medida de Lebesgue.

4. Sea $X = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, y μ la medida de Lebesgue inducida. La aplicación $\tau : z \mapsto e^{2\pi\theta i} z$ es una transformación que preserva la medida (véase [10]).

Teorema 1.8. *(***Teorema de recurrencia de Poincaré***) Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida finita y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Sea $A \in \mathcal{M}$ con $\mu(A) > 0$, entonces para casi todo $x \in A$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau^n(x) \in A$.*

Demostración: Sea

$$\begin{aligned} B =& \{x \in A : \text{ no existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \tau^n(x) \in A\} \\ =& \{x \in A : \tau^n(x) \notin A \ \forall n \in \mathbb{N}\} = A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(A) \right). \end{aligned}$$

Tenemos que probar que B tiene medida cero. Como τ conserva la medida, entonces $\tau^{-n}(A)$ es medible para cada $n \in \mathbb{N}$ y por tanto B es medible. Consideremos la familia

$\{\tau^{-k}(B)\}_{k=1}^{\infty}$, que verifica $\mu(\tau^{-k}(B)) = \mu(B)$ para todo $k \geq 1$. Veamos que es una familia disjunta dos a dos, para ello observemos que $B \cap \tau^{-n}(B) = \emptyset$ para todo $n \geq 1$, y por tanto $\tau^{-k}(B) \cap \tau^{-(k+n)}(B) = \emptyset$ para todos $n, k \geq 1$. Entonces, utilizando que es una familia disjunta dos a dos obtenemos

$$\infty > \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \tau^{-k}(B)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\tau^{-k}(B)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B).$$

Por tanto, necesariamente $\mu(B) = 0$. □

Teorema 1.9. *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida finita y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Sea $A \in \mathcal{M}$ con $\mu(A) > 0$, entonces para casi todo $x \in A$, existe una sucesión creciente de números naturales $\{m_i\}$ tal que $\tau^{m_i}(x) \in A$ para todo $i \geq 1$.*

Demostración: Por el teorema anterior, existe un conjunto de medida nula N_1 tal que para todo $x \in A \setminus N_1$ existe un natural $n = n(x)$ con $\tau^n(x) \in A$. Sea $N = \bigcup_{k=0}^{\infty} \tau^{-k}(N_1)$, entonces como τ conserva la medida

$$\mu(N) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \tau^{-k}(N_1)\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(\tau^{-k}(N_1)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(N_1) = 0.$$

Para todo $k \geq 0$, $\tau^{-k}(N) \subset N$, luego $N^c \subset \tau^{-k}(N^c)$, y por tanto si $x \notin N$ entonces $\tau^k(x) \notin N$. Como $A \setminus N \subset A \setminus N_1$ entonces dado $x \in A \setminus N \subset A \setminus N_1$, existe m_1 tal que $\tau^{m_1}(x) \in A \setminus N$. Aplicando este proceso a $z = \tau^{m_1}(x) \in A \setminus N$, obtenemos que existe n_1 tal que $\tau^{n_1}(z) \in A \setminus N$. Tomemos entonces $m_2 = m_1 + n_1$, y entonces $\tau^{m_2}(x) = \tau^{n_1}(z) \in A \setminus N$. Continuando este proceso obtenemos la sucesión creciente que buscábamos. □

2. Transformaciones ergódicas

En esta sección vamos a definir las transformaciones ergódicas, para ello primero tendremos que definir los conjuntos invariantes y las funciones invariantes. Seguidamente daremos una caracterización de las transformaciones ergódicas, y por último se expondrán algunos ejemplos. En esta sección seguiremos el libro de Petersen [11].

Definición 1.10. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida de los conjuntos de medida nula.

1. Se dice que un conjunto medible A es τ-**invariante** módulo μ si $\mu(\tau^{-1}(A) \triangle A) = 0$.
2. Se dice que una función medible f es τ-**invariante** módulo μ si $f(\tau(x)) = f(x)$ para casi todo $x \in X$.

Observación 1.11. Observemos que $E \in \mathcal{M}$ es τ-invariante módulo μ si y solo si χ_E es τ-invariante módulo μ.

Definición 1.12. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida de los conjuntos de medida nula. Se dice que τ es **ergódica** si para cada conjunto A τ-invariante módulo μ se tiene $\mu(A) = 0$ o $\mu(X \setminus A) = 0$.

Podemos dar la siguiente caracterización de la ergodicidad.

Proposición 1.13. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida de los conjuntos de medida nula. Entonces, τ es ergódica si y solo si toda función τ-invariante módulo μ es constante en casi todo punto.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que τ es ergódica. Sea f una función τ-invariante. Entonces para cada $\lambda > 0$, $E_\lambda = \{x \in X : f(x) > \lambda\}$ es medible, veamos que es τ-invariante módulo μ. Como f es τ-invariante módulo μ, entonces si definimos el conjunto $N = \{x \in X : f(x) = f(\tau(x))\}$, se verifica $\mu(E^c) = 0$. Observemos que $\tau^{-1}(E_\lambda) = \{x \in X : f(\tau(x)) > \lambda\} = \{x \in N : f(\tau(x)) > \lambda\} \cup \{x \in N^c : f(\tau(x)) > \lambda\} \subset E_\lambda \cup N^c$, y por tanto $\tau^{-1}(E_\lambda) \setminus E_\lambda \subset N^c$. Análogamente, tenemos que $E_\lambda \subset \tau^{-1}(E_\lambda) \cup N^c$, luego $E_\lambda \backslash \tau^{-1}(E_\lambda) \subset N^c$. Entonces podemos concluir $\mu(\tau^{-1}(E_\lambda) \triangle E_\lambda) = \mu((E_\lambda \backslash \tau^{-1}(E_\lambda)) \cup (\tau^{-1}(E_\lambda) \setminus E_\lambda)) \leq \mu(E_\lambda \setminus \tau^{-1}(E_\lambda)) + \mu(\tau^{-1}(E_\lambda) \setminus E_\lambda) \leq \mu(N^c) + \mu(N^c) = 0 + 0 = 0$, luego E_λ es τ-invariante módulo μ. Como τ es ergódica, entonces $\mu(E_\lambda) = 0$ o $\mu(E_\lambda^c) = 0$. Si f no fuera constante en casi todo punto, entonces existiría $\lambda > 0$ tal que $\mu(E_\lambda) > 0$ y $\mu(E_\lambda^c) > 0$. Por tanto, necesariamente f es constante en casi todo punto.
Supongamos ahora que toda función medible τ-invariante es constante en casi todo punto. Sea $E \in \mathcal{M}$ un conjunto τ-invariante, entonces χ_E es τ-invariante y por tanto χ_E es constante en casi todo punto. Luego $\chi_E = 0$ en casi todo punto o $\chi_E = 1$ en casi todo punto, esto es, $\mu(E) = 0$ o $\mu(E^c) = 0$. Luego τ es ergódica. □

Ejemplo 1.14. Consideremos $X = \mathbb{Z}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, y $\mu = \#$ la medida contadora. Veamos que la transformación $\tau : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\tau(k) = k+1$ es ergódica. Como vimos en el Ejemplo 1.7 esta transformación conserva la medida. Como τ es una biyección, entonces $A = \tau^{-1}(A)$ equivale a decir $A = \tau(A)$. Supongamos que A un subconjunto de $\mathbb{Z}$ τ-invariante módulo μ, entonces si $k \in A$ se tiene $k - 1, k + 1 \in A$. Esto implica que los únicos subconjuntos τ-invariantes son el vacío y el total, y por tanto τ es ergódica.

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida, y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Nos gustaría estudiar la convergencia en casi todo punto de $\{f(\tau^n(x))\}_{n=0}^\infty$ para $f \in L^1(\mu)$, pero como vamos a ver en el siguiente resultado, en general esta sucesión no es convergente en casi todo punto.

Teorema 1.15. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida con $\mu(X) < \infty$, y $\tau : X \longrightarrow X$ ergódica. Entonces para todo $A \in \mathcal{M}$ con $\mu(A) > 0$ se tiene que $\mu(X \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \tau^{-n}(A)) = 0$.*

Demostración: Sea A un conjunto de medida positiva y consideremos $A' = \bigcup_{n=1}^\infty \tau^{-n}(A)$. Entonces por la definición de A' tenemos $\tau^{-1}(A') \subset A'$, y además $\mu(A') \geq \mu(\tau^{-1}(A)) = \mu(A) > 0$, luego aplicando el Teorema 1.8 obtenemos que $\mu(A' \setminus \tau^{-1}(A')) = 0$. Como τ es ergódica y A' es τ-invariante con $\mu(A') > 0$ entonces necesariamente $\mu(X \setminus A') = 0$. □

Hemos probado que si τ es ergódica y $A \in \mathcal{M}$ con $\mu(A) > 0$, entonces para casi todo $x \in X$ existe un $n \in \mathbb{N}$, que solo depende de A y de x tal que $\tau^n(x) \in A$. Luego, en general, la sucesión $\{\chi_A(\tau^n(x))\}_{n=0}^\infty$ no converge en casi todo punto. Así que en este capítulo vamos a estudiar el comportamiento de las medias aritméticas cuando $n \to \infty$. Dadas una transformación $\tau : X \longrightarrow X$ que conserva la medida y una función medible $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos la sucesión de medias aritméticas de f como

$$A_n f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k(x)). \tag{1.2}$$

3. Teorema ergódico maximal

La clave para estudiar la convergencia en casi todo punto de las medias (1.2) es estimar su correspondiente función maximal. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida σ-finito, dada una transformación $\tau : X \longrightarrow X$ que conserva la medida y una función medible $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos la función maximal asociada a las medias $A_n f$ como

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{1\leq n<\infty} A_n |f| (x) = \sup_{1\leq n<\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|f(\tau^k(x))\right|. \tag{1.3}$$

Observemos que para casi todo $x \in X$ tenemos

$$A_n f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k(x)) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty ,$$

y por tanto, tomando supremo en $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\mathcal{M}f(x) \leq \|f\|_\infty$ para casi todo $x \in X$. Es decir, hemos obtenido

$$\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty . \tag{1.4}$$

Teorema 1.16. *Sea $f \in L^1(\mu)$, entonces la función maximal $\mathcal{M}f$ es finita en casi todo punto. Además, existe una constante A tal que*

$$\mu(\{x \in X : \mathcal{M}f(x) > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_1 \tag{1.5}$$

para todo $\alpha > 0$.

Demostración: Vamos a dar hacer una demostración por transferencia, es decir, la desigualdad (1.5) es conocida para la función maximal de Hardy-Littlewood (véase A.2), y la vamos a transferir al caso ergódico.
La función $\mathcal{M}f$ es medible por ser el supremo de una colección numerable de funciones medibles. Podemos suponer que f es no negativa, ya que en caso contrario la podemos sustituir por $|f|$.
En primer lugar lo probaremos para $X = \mathbb{Z}$ y $\tau : n \mapsto n + 1$. Para cada $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ consideramos su extensión $\widetilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\widetilde{f}(x) = f(n)$ si $n \leq x < n + 1$, con $n \in \mathbb{Z}$. Análogamente, si $E \subset \mathbb{Z}$, denotamos por $\widetilde{E}$ al conjunto $\widetilde{E} = \bigcup_{n\in E}[n, n + 1)$. Como resultado de estas definiciones tenemos $m(\widetilde{E}) = \#E$ y $\int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(x)dm(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$, luego $||\widetilde{f}||_{L^1(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^1(\mathbb{Z})}$, donde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y $\#$ es la medida contadora en $\mathbb{Z}$. Notemos también que $\sum_{k=0}^{m-1} f(n + k) = \int_0^m \widetilde{f}(n + t)dt$. Luego si $x \in [n, n + 1)$ tenemos

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(n + k) = \frac{1}{m} \int_0^m \widetilde{f}(x + t)dt = \left(\frac{m + 1}{m}\right) \frac{1}{m + 1} \int_{-1}^m \widetilde{f}(x + t)dt.$$

Tomando supremo para $m \geq 1$ y teniendo en cuenta que $\left(\frac{m+1}{m}\right) \leq 2$:

$$\mathcal{M}f(n) \leq 2M(\widetilde{f})(x) \qquad \text{para } x \in [n, n + 1),$$

donde $M(\widetilde{f})$ es la función maximal de Hardy-Littlewood. Luego $\#(\{n/\mathcal{M}f(n) > \alpha\}) \leq m(\{x \in \mathbb{R}/\mathcal{M}(\widetilde{f})(x) > \frac{\alpha}{2}\})$. Entonces aplicando (A.2) a $M(\widetilde{f})$ tenemos

$$\#(\{n/\mathcal{M}f(n) > \alpha\}) \leq m(\{x \in \mathbb{R}/M(\widetilde{f})(x) > \frac{\alpha}{2}\}) \leq \frac{2A'}{\alpha}||\widetilde{f}||_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Como $A' = 3$ y $||\widetilde{f}||_{L^1(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^1(\mathbb{Z})}$, obtenemos

$$\#(\{n \in \mathbb{N} : \mathcal{M}f(n) > \alpha\}) \leq \frac{6}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mathbb{Z})}.$$

Consideremos ahora el caso general, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida. Para cada entero positivo N, consideramos la función maximal truncada $\mathcal{M}f_N$ definida como:

$$\mathcal{M}f_N(x) = \sup_{1\leq m\leq N} \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(\tau^k(x)).$$

Como $\{\mathcal{M}f_N(x)\}$ es una sucesión creciente, y $\lim_{N\to\infty} \mathcal{M}f_N(x) = \mathcal{M}f(x)$ para cada x, es suficiente ver que

$$\mu(\{x \in X : \mathcal{M}f_N(x) > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha}\|f\|_{L^1(X)},$$

con A una constante independiente de N, ya que tomando límite cuando $N \to \infty$ obtenemos el resultado que buscamos. Probemos ahora el caso general.

Sea $f \in L^1(\mu)$, definamos la función $F : X \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x,n) = \begin{cases} f(\tau^n(x)) & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$.

Entonces,

$$A_m f(x) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(\tau^k(x)) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} F(x,k).$$

Si evaluamos en $\tau^n(x)$ con n un entero positivo, como $\tau^k(\tau^n(x)) = \tau^{n+k}(x)$, se tiene

$$A_m f(\tau^n(x)) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} F(x, n+k).$$

Tomemos a entero positivo grande y fijemos $b = a + N$. Escribimos la función truncada, $F_b : X \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F_b(x,n) = F(x,n)$ si $n < b$ y 0 en el resto de casos. Entonces tenemos:

$$A_m f(\tau^n(x)) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} F_b(x, n+k) \qquad \text{si } m < N \text{ y } n < a.$$

Luego,

$$\mathcal{M}f_N(\tau^n(x)) \leq \mathcal{M}(F_b)(x,n) \qquad \text{si } n < a.$$

Sea $E_\alpha = \{x : \mathcal{M}f_N(x) > \alpha\}$, entonces como τ es una transformación que preserva la medida, $\mu(\{x : \mathcal{M}f_N(\tau^n(x)) > \alpha\}) = \mu(E_\alpha)$. En el espacio producto $X \times \mathbb{Z}$, la medida producto $\mu \otimes \#$ del conjunto $\{(x,n) \in X \times \mathbb{Z} : \mathcal{M}f_N(\tau^n(x)) > \alpha, 0 \leq n < a\}$ es $a\mu(E_\alpha)$. Además, como $\mathcal{M}f_N(\tau^n(x)) \leq \mathcal{M}(F_b)(x,n)$ si $n < a$, entonces la medida de $\{(x,n) \in X \times \mathbb{Z} : \mathcal{M}f_N(\tau^n(x)) > \alpha, 0 \leq n < a\}$ es menor que

$$\int_X \#(\{n \in \mathbb{Z} : \mathcal{M}(F_b)(x,n) > \alpha\})d\mu(x).$$

Por lo probado en primer lugar, el integrando es menor o igual que:

$$\frac{A}{\alpha} \|F_b(x,n)\|_{L^1(\mathbb{Z})} = \frac{A}{\alpha} \sum_{n=0}^{b-1} f(\tau^n(x))$$

con $A = 6$. Como estamos integrando sobre X, y usando que $\int_X f(\tau^n(x))d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x)$, nos queda:

$$\begin{aligned} a\mu(E_\alpha) \leq & \frac{A}{\alpha} \sum_{n=0}^{b-1} \int_X f(\tau^n(x))d\mu(x) = \frac{A}{\alpha} \sum_{n=0}^{b-1} \int_X f(x)d\mu(x) \\ = & \frac{A}{\alpha} \sum_{n=0}^{b-1} \|f\|_{L^1(X)} = \frac{A}{\alpha} b \|f\|_{L^1(X)} = \frac{A}{\alpha}(a+N) \|f\|_{L^1(X)}. \end{aligned}$$

Luego, $\mu(E_\alpha) \leq \frac{A}{\alpha}\left(1 + \frac{N}{a}\right) \|f\|_{L^1(X)}$, y tomando límite cuando $a \to \infty$ obtenemos $\mu(x : \mathcal{M}f_N(x) > \alpha) \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L^1(X)}$. Ahora haciendo tender $N \to \infty$ conseguimos

$$\mu(\{x \in X : \mathcal{M}f(x) > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L^1(X)}.$$

□

En el siguiente lema vamos a mejorar la desigualdad (1.5).

Lema 1.17. *Sea $f \in L^p(\mu)$ con $1 < p < \infty$, y $\mathcal{M}f$ la función maximal asociada a f. Entonces*

$$\mu(\{x \in X : \mathcal{M}f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\{x \in X : |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\}} |f(x)|d\mu(x) \tag{1.6}$$

para todo $\lambda > 0$.

Demostración: Para cada $\lambda \geq 0$ definimos las siguientes funciones

$$f^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \frac{\lambda}{2} \end{cases}, \qquad f_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |f(x)| > \frac{\lambda}{2} \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \frac{\lambda}{2} \end{cases}.$$

La medibilidad de f^λ y f_λ es consecuencia de que f es una función medible. Observemos que $f = f^\lambda + f_\lambda$ y $\|f_\lambda\|_\infty \leq \frac{\lambda}{2}$ para cada $\lambda \geq 0$. Sea $E_\lambda = \{x \in X : \mathcal{M}f(x) > \lambda\}$, entonces para cada $x \in E_\lambda$,

$$\begin{aligned} \lambda < \mathcal{M}f(x) = & \mathcal{M}(f^\lambda + f_\lambda)(x) \leq \mathcal{M}(f^\lambda)(x) + \mathcal{M}(f_\lambda)(x) \\ \leq & \mathcal{M}(f^\lambda)(x) + \|\mathcal{M}(f_\lambda)\|_\infty \leq \mathcal{M}(f^\lambda)(x) + \|f_\lambda\|_\infty \\ \leq & \mathcal{M}(f^\lambda)(x) + \frac{\lambda}{2}, \end{aligned}$$

y por tanto, $\mathcal{M}(f^\lambda)(x) > \frac{\lambda}{2}$. Hemos obtenido así la siguiente contención, $E_\lambda \subset \{x \in X : \mathcal{M}(f^\lambda)(x) > \frac{\lambda}{2}\}$, y usando la desigualdad (1.5) obtenemos

$$\begin{aligned}\mu(E_\lambda) \leq & \mu(\{x \in X : \mathcal{M}(f^\lambda)(x) > \frac{\lambda}{2}\}) \leq \frac{2A}{\lambda}\int_X |f^\lambda(x)|d\mu(x) \\ = & \frac{2A}{\lambda}\int_{\{x\in X:|f(x)|>\frac{\lambda}{2}\}} |f(x)|d\mu(x),\end{aligned}$$

consiguiendo así la desigualdad con $C = 2A$. □

Teorema 1.18. *Sea $f \in L^p(\mu)$ con $1 < p < \infty$, y $\mathcal{M}f$ la función maximal asociada a f. Entonces*

$$\|\mathcal{M}f\|_p \leq C_p \|f\|_p, \tag{1.7}$$

donde $C_p > 0$ solo depende de p.

Demostración: Para probar esta desigualdad vamos a usar la siguiente igualdad para la norma p, que se ha probado en la asignatura de *Análisis Real*. Para toda función medible f se tiene

$$\int_X |f|^p d\mu = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})d\lambda. \tag{1.8}$$

La vamos a aplicar a la función maximal $\mathcal{M}f$. Aplicando el Lema 1.17 y el Teorema de Tonelli obtenemos

$$\begin{aligned}\int_X |\mathcal{M}f(x)|^p d\mu(x) = & p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu(\{x \in X : \mathcal{M}f(x) > \lambda\})d\lambda \\ \leq & Cp\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(\frac{1}{\lambda}\int_{\{x\in X:|f(x)|>\frac{\lambda}{2}\}} |f(x)|d\mu(x)\right)d\lambda \\ = & Cp\int_X |f(x)|\left(\int_0^\infty \lambda^{p-2}\chi_{\{x\in X:|f(x)|>\frac{\lambda}{2}\}}(x)d\lambda\right)d\mu(x) \\ = & Cp\int_X |f(x)|\left(\int_0^{2|f(x)|} \lambda^{p-2}d\lambda\right)d\mu(x) \\ = & Cp\int_X |f(x)|\left[\frac{\lambda^{p-1}}{p-1}\right]_0^{2|f(x)|} d\mu(x) = \frac{2^{p-1}Cp}{p-1}\int_X |f(x)|^p d\mu(x).\end{aligned}$$

Hemos obtenido así (1.7) con $C_p = \left(\frac{2^{p-1}Cp}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}$. □

Como consecuencia tenemos la siguiente desigualdad, que generaliza a (1.5).

Corolario 1.19. *Sea $f \in L^p(\mu)$ con $1 \leq p < \infty$, entonces para todo $\lambda > 0$ tenemos*

$$\mu(\{x \in X : \mathcal{M}f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p}\|f\|_p^p. \tag{1.9}$$

Demostración: Para $p = 1$ es la desigualdad (1.5). Supongamos $1 < p < \infty$, entonces aplicando el Teorema 1.18 obtenemos

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in X : \mathcal{M}f(x) > \lambda\}) = & \int_{\{x\in X:\mathcal{M}(x)>\lambda\}} 1d\mu(x) < \int_{\{x\in X:\mathcal{M}(x)>\lambda\}} \frac{\mathcal{M}f(x)^p}{\lambda^p}d\mu(x) \\ \leq & \frac{1}{\lambda^p}\|\mathcal{M}f\|_p^p \leq \frac{C_p^p}{\lambda^p}\|f\|_p^p\end{aligned}$$

para cada $\lambda > 0$. □

4. Teorema individual ergódico

En esta sección vamos a probar que si $f \in L^p(\mu)$ para $1 \leq p < \infty$, entonces $A_n f(x)$ converge para casi todo $x \in X$. Para ello primero lo probaremos para $f \in L^2(\mu)$ y con un argumento de densidad lo extenderemos a $L^p(\mu)$. En primer lugar necesitaremos una descomposición adecuada de $L^2(\mu)$. El motivo de considerar $L^2(\mu)$ es que $(L^2(\mu), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert, donde $\langle f, g \rangle = \int_X f(x)g(x)d\mu(x)$.

4.1. Descomposición de $L^2(\mu)$

Proposición 1.20. *Sea $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Consideremos la isometría $T : L^2(\mu) \longrightarrow L^2(\mu)$, $T(f)(x) = f(\tau(x))$. Si definimos los conjuntos*

$$A = \{f \in L^2(\mu) : T(f) = f\}, \qquad B = \{f - T(f) : f \in L^2(\mu)\}.$$

Entonces el complemento ortogonal de A es $\overline{B}$.

Demostración: Sean $f \in A$ y $g - T(g) \in B$, entonces

$$\langle f, g - T(g) \rangle = \langle f, g \rangle - \langle f, T(g) \rangle = \langle f, g \rangle - \langle T(f), T(g) \rangle = \langle f, g \rangle - \langle f, g \rangle = 0.$$

Sea $h \in \overline{B}$, entonces existe una sucesión $\{h_k\} \subset B$ tal que converge a h en norma 2. Por tanto

$$\langle f, h \rangle = \left\langle f, \lim_{k \to \infty} h_k \right\rangle = \lim_{k \to \infty} \langle f, h_k \rangle = 0.$$

Por tanto, $A \subset \overline{B}^{\perp}$. Veamos la otra inclusión, sea $f \in \overline{B}^{\perp}$. Entonces para toda $g \in L^2(\mu)$ tenemos que $\langle f, g - T(g) \rangle = \langle f, g \rangle - \langle f, T(g) \rangle = 0$. Luego,

$$\langle f, g \rangle = \langle f, T(g) \rangle = \langle T^*(f), g \rangle ,$$

donde T^* es la adjunta de T. Es decir, $\langle f - T^*(f), g \rangle = 0$ para toda $g \in L^2(\mu)$, y por tanto $f = T^*(f)$ en casi todo punto. Entonces, $\langle f - T^*(f), f \rangle = \langle f, f \rangle - \langle T^*(f), f \rangle = 0$, y por tanto

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \langle T^*(f), f \rangle = \langle f, T(f) \rangle .$$

Como T es una isometría, entonces $\|Tf\|_2 = \|f\|_2$, y hemos obtenido que se da la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz y por tanto $T(f) = \lambda f$ en casi todo punto, para $\lambda \in \mathbb{R}$. Además, como $\langle f, T(f) \rangle = \|f\|_2^2$, obtenemos $\lambda = 1$ y por tanto f es invariante, lo que prueba $\overline{B}^{\perp} \subset A$. □

Como consecuencia obtenemos la siguiente descomposición de $L^2(\mu)$.

Corolario 1.21. $L^2(\mu) = A \bigoplus \overline{B} = \overline{A \bigoplus B}$.

Demostración: La primera igualdad es consecuencia de la proposición anterior. Probemos $A \bigoplus \overline{B} = \overline{A \bigoplus B}$. Sea $f \in A \bigoplus \overline{B}$, entonces existen $F \in A$ y $G \in \overline{B}$ tales que $f = F + G$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existen $g \in B$ y $h \in L^2(\mu)$ tales que $G = g + h$ y $\|h\|_2 < \varepsilon$. Por lo tanto podemos escribir $f = (F + g) + h$, donde $F + g \in A \bigoplus B$ y $\|h\|_2 < \varepsilon$, es decir $f \in \overline{A \bigoplus B}$. La otra inclusión se prueba análogamente. □

4.2. Teorema individual ergódico en $L^2(\mu)$

Teorema 1.22. *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Sea $f \in L^2(\mu)$, entonces para casi todo $x \in X$ las medias $A_n f(x)$ tienen límite cuando $n \to \infty$.*

Demostración: En vista de la descomposición de $L^2(\mu)$ del Corolario 1.21, en primer lugar estudiaremos la convergencia en casi todo punto de funciones de $A \bigoplus B$. Sea $f \in A$, entonces

$$A_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k(x)) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x) = f(x),$$

que converge a $f(x)$ para todo $x \in X$.
Sea $g \in B$. Veamos que $A_n g$ converge a 0 en casi todo punto. Como $g \in B$, entonces existe $f \in L^2(\mu)$ tal que $g = f - T(f)$. Tenemos entonces

$$A_n g(x) = A_n f(x) - A_n(T(f(x))) = \frac{f(x)}{n} - \frac{f(\tau^n(x))}{n}.$$

El primer término converge trivialmente a 0 para todo $x \in X$. Para probar que el segundo término tiende a 0 en casi todo punto, observemos que

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f(\tau^n(x))^2 d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \|T^n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f(\tau^n(x))^2 < \infty$ en casi todo $x \in X$, y esto implica que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(\tau^n(x))}{n} = 0$ para casi todo $x \in X$. Hemos probado así que $A_n g \longrightarrow 0$ en casi todo punto.
Sean$f \in L^2(\mu)$ y $\varepsilon > 0$, entonces como $A \bigoplus B$ es denso en $L^2(\mu)$, existen $F \in A \bigoplus B$ y $H \in L^2(\mu)$ tales que $f = F + H$ y $\|H\|_2 < \varepsilon^{\frac{1}{2}}$.
Para probar la convergencia en casi todo punto de $\{A_n f(x)\}$, probemos que es de Cauchy para casi todo $x \in X$. Definamos el conjunto

$$E_\alpha = \{x \in X : \lim_{N\to\infty} \sup_{m,n\geq N} |A_n f(x) - A_m f(x)| > \alpha\},$$

y probemos que $\mu(E_\alpha) = 0$ para todo $\alpha > 0$. Observemos que

$$A_n f - A_m f = (A_n(F) - A_m(F)) + (A_n(H) - A_m(H))$$

y como hemos visto $A_n(F)$ converge en $X \setminus N$, con N un conjunto de medida nula. Se sigue entonces que

$$E_\alpha \subset E'_\alpha = \{x \in X : \lim_{N\to\infty} \sup_{m,n\geq N} |A_n(H)(x) - A_m(H)(x)| > \alpha\} \cup N.$$

Entonces aplicando el Corolario 1.19 para $p = 2$ se tiene,

$$\begin{aligned}\mu(E_\alpha) \leq & \mu(E'_\alpha) \leq \mu(\{x \in X : 2 \sup_n |A_n(H)(x)| > \alpha\}) \\ \leq & \frac{2A}{\alpha^2} \|H\|_2^2 \leq \frac{2A}{\alpha^2}\varepsilon.\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, entonces necesariamente $\mu(E_\alpha) = 0$. Hemos probado que $\{A_n f(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en casi todo $x \in X$, entonces como $\mathbb{R}$ es completo tenemos que es convergente en casi todo punto. □

4.3. Teorema individual ergódico en $L^p(\mu)$

Teorema 1.23. *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Sea $f \in L^p(\mu)$ con $1 \leq p < \infty$, entonces para casi todo $x \in X$ las medias $A_n f(x)$ tienen límite cuando $n \to \infty$.*

Demostración: Sean $f \in L^p(\mu)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, como $L^2(\mu) \cap L^p(\mu)$ es denso en $L^p(\mu)$, existe $F \in L^2(\mu) \cap L^p(\mu)$ tal que $\|f - F\|_p \leq \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Si definimos $H = f - F$, entonces tenemos la siguiente descomposición, $f = F + H$ con $F \in L^2(\mu) \cap L^p(\mu)$ y $\|H\|_p \leq \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Para probar la convergencia en casi todo punto de $\{A_n f(x)\}$, probemos que es de Cauchy para casi todo $x \in X$. Definamos el conjunto

$$E_\alpha = \{x \in X : \lim_{N\to\infty} \sup_{m,n\geq N} |A_n f(x) - A_m f(x)| > \alpha\},$$

y probemos que $\mu(E_\alpha) = 0$ para todo $\alpha > 0$. Observemos que

$$A_n f - A_m f = (A_n F - A_m F) + (A_n H - A_m H)$$

y por el Teorema 1.22 tenemos que $A_n F$ converge en $X \setminus N$, con N un conjunto de medida nula, se sigue entonces que

$$E_\alpha \subset E'_\alpha = \{x \in X : \lim_{N\to\infty} \sup_{m,n\geq N} |A_n(H)(x) - A_m(H)(x)| > \alpha\} \cup N.$$

Entonces aplicando el Corolario 1.19 obtenemos,

$$\begin{aligned}\mu(E_\alpha) \leq & \mu(E'_\alpha) \leq \mu(\{x \in X : 2 \sup_n |A_n(H)(x)| > \alpha\}) \\ \leq & \frac{2A}{\alpha^p} \|H\|_p^p \leq \frac{2A}{\alpha^p}\varepsilon.\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, entonces necesariamente $\mu(E_\alpha) = 0$. Hemos probado que $\{A_m f(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en casi todo $x \in X$, entonces como $\mathbb{R}$ es completo tenemos que es convergente en casi todo punto. □

El caso $p = 1$ del Teorema 1.23 es muy importante, es el llamado **Teorema de Birkhoff**. Ahora que hemos probado la existencia del límite de $A_n f$ en casi todo punto para toda $f \in L^p(\mu)$, vamos a obtener algunas propiedades del límite.

Teorema 1.24. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Sea $f \in L^p(\mu)$ con $1 \leq p < \infty$. Si denotamos por f^* al límite de las medias $A_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k(x))$, entonces tenemos*

1. *f^* es τ-invariante módulo μ, es decir, $f^*(\tau(x)) = f^*(x)$ para casi todo $x \in X$.*
2. *Si $p = 1$, entonces*

$$\int_X |f^*(x)|\, d\mu(x) \leq \int_X |f(x)|\, d\mu(x),$$

es decir, $f^* \in L^1(\mu)$. Además, si $\mu(X) < \infty$, entonces se da la igualdad

$$\int_X f^*(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x). \tag{1.10}$$

Demostración: Sea $f \in L^p(\mu)$ con $1 \leq p < \infty$, y f^* el límite de $A_n f$. Para probar que f es τ-invariante vamos a usar la siguiente relación entre $A_{n+1}f$ y $A_n f$,

$$A_{n+1}f(x) = \frac{1}{n+1}f(x) + \frac{n}{n+1}A_n f.$$

Usando esta relación y la definición de f^* obtenemos

$$\begin{aligned} f^*(\tau(x)) &= \lim_{n\to\infty} A_n f(\tau(x)) = \lim_{n\to\infty} \left(A_{n+1}f(x) - \frac{1}{n+1}f(x) \right) \frac{n+1}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} A_{n+1}f(x) = \lim_{n\to\infty} A_n f(x) = f^*(x) \end{aligned}$$

en casi todo $x \in X$.
Supongamos ahora $p = 1$, entonces para cada n se verifica

$$\int_X |A_n f(x)|\, d\mu(x) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \int_X \left|f(\tau^k(x))\right| d\mu(x) = \int_X |f(x)|\, d\mu(x)$$

y como $A_n f \longrightarrow f^*$ en casi todo punto, entonces usando el Lema de Fatou tenemos

$$\int_X |f^*(x)|\, d\mu(x) \leq \liminf_{m\to\infty} \int_X |A_n f(x)|\, d\mu(x) \leq \liminf_{m\to\infty} \int_X |f(x)|\, d\mu(x) = \int_X |f(x)|\, d\mu(x).$$

Supongamos por último que $\mu(X) < \infty$, probemos la igualdad primero para funciones acotadas. Sea g acotada, entonces como el espacio de medida es finito $g \in L^1(\mu)$. Entonces existe $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in X$. Observemos que podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada a $A_n g$, ya que $|A_n g(x)| \leq M \in L^1(\mu)$, y las constantes son integrables en espacios de medida finita. Además, por lo probado en el apartado 1, existe $g^* \in L^1(\mu)$ τ-invariante módulo μ tal que $A_n g \longrightarrow g^*$ en casi todo punto. Entonces,

$$\int_X g^*(x)d\mu(x) = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} A_n g(x) \right) d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X A_n g(x) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x).$$

Sean $f \in L^1(\mu)$ y $\varepsilon > 0$. Como las funciones acotadas son densas en $L^1(\mu)$, entonces existe $g \in L^1(\mu)$ acotada tal que $\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo probado en el apartado 1 existe $f^* \in L^1(\mu)$ tal que $A_n f \longrightarrow f^*$ en casi todo punto, por tanto

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu - \int_X f^* d\mu \right| &\leq \left| \int_X f d\mu - \int_X g d\mu \right| + \left| \int_X g d\mu - \int_X f^* d\mu \right| \\ &\leq \int_X |f - g| d\mu + \left| \int_X g d\mu - \int_X g^* d\mu \right| + \left| \int_X g^* d\mu - \int_X f^* d\mu \right| \\ &\leq \|f - g\|_1 + 0 + \left| \int_X (f^* - g^*) d\mu \right| \\ &\leq \|f - g\|_1 + \|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, entonces se da la igualdad $\displaystyle\int_X f^*(x)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x)$. $\square$

4.4. Identificación del límite

En el siguiente resultado vamos a ver que si τ es ergódica podemos calcular explícitamente el límite de las medias $A_n f$.

Teorema 1.25. *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación ergódica que conserva la medida. Si $f \in L^1(\mu)$, entonces se verifica*

1. *Si $0 < \mu(X) < \infty$, $\lim_{n\to\infty} A_n f(x) = \dfrac{1}{\mu(X)} \displaystyle\int_X f(x)d\mu(x)$ en casi todo $x \in X$.*
2. *Si $\mu(X) = \infty$, $\lim_{n\to\infty} A_n f(x) = 0$ para casi todo $x \in X$.*

Observación 1.26. El caso $\mu(X) = 0$ no se está considerando, ya que carece de interés.

Demostración:

1. Por el Teorema 1.24 tenemos que $A_n f$ converge en casi todo punto a una función f^* τ-invariante. Como τ es ergodica, entonces aplicando la Proposición 1.13 obtenemos que f^* es igual a una contante A en casi todo punto. Además, como estamos suponiendo $\mu(X) < \infty$, entonces por (1.10) tenemos que
$$\int_X f(x)d\mu(x) = \int_X f^*(x)d\mu(x) = A\mu(X).$$
Por tanto,
$$f^*(x) = A = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f(x)d\mu(x)$$
para casi todo $x \in X$.
2. Si $\mu(X) = \infty$, entonces necesariamente f^* debe ser la función nula en casi todo punto, ya que es la única constante integrable. □

Vamos a probar que, si $\mu(X) < \infty$ y $f \notin L^1(\mu)$ entonces en general no se tiene la convergencia en casi todo punto de las medias $A_n f$.

Teorema 1.27. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida, con $\mu(X) < \infty$, y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación ergódica que conserva la medida. Si $f \notin L^1(\mu)$ es no negativa, entonces*
$$\lim_{n\to\infty} A_n f(x) = \infty$$
para casi todo $x \in X$.

Demostración: Sea $\{s_k\}$ una sucesión de funciones simples integrables tal que $0 \leq s_k \uparrow f$. Entonces se tiene,
$$\liminf_{n\to\infty} A_n s_k(x) \leq \liminf_{n\to\infty} A_n f(x).$$
Por otra parte, como $s_k \in L^1(\mu)$ para cada k, tenemos
$$\frac{1}{\mu(X)} \int_X s_k(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} A_n s_k(x) = \liminf_{n\to\infty} A_n s_k(x) \leq \liminf_{n\to\infty} A_n f(x)$$
para casi todo $x \in X$. Tomando límite cuando $k \to \infty$ obtenemos
$$\frac{1}{\mu(X)} \int_X f(x)d\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} A_n f(x).$$
para casi todo $x \in X$. Y como $\displaystyle\int_X f(x)d\mu(x) = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} A_n f(x) = \infty$ en casi todo punto. □

5. Teorema ergódico en media

En esta sección vamos a estudiar la convergencia en $L^p(\mu)$ de $A_n f$ para $1 \leq p < \infty$. En primer lugar trataremos el caso $p = 1$, para el que solo será cierto el resultado para espacios de medida finita.

Teorema 1.28. *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida con $\mu(X) < \infty$ y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Si $f \in L^1(\mu)$ entonces $A_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k(x))$ converge en $L^1(\mu)$.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que $f \in L^1(\mu)$ es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$. Entonces por el Teorema 1.23 existe $f^* \in L^1(\mu)$ tal que $A_n f \longrightarrow f^*$ en casi todo punto. Para ver que $\lim_{n\to\infty} \|A_n f - f^*\|_1 = 0$, basta aplicar el Teorema de la convergencia dominada

$$|A_n f| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k(x))\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M = M \in L^1(\mu)$$

ya que las constantes son integrables por ser X de medida finita. Por lo tanto aplicando el Teorema de la convergencia dominada tenemos que $A_n f \longrightarrow f^*$ en $L^1(\mu)$.
Sea $f \in L^1(\mu)$ y $\varepsilon > 0$. Como las funciones acotadas son densas en $L^1(\mu)$, existe $g \in L^1(\mu)$ acotada tal que $\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Como $g \in L^1(\mu)$, entonces existe $g^* \in L^1(\mu)$ tal que $A_n g \longrightarrow g^*$ en casi todo punto. Además, como g es acotada por lo probado anteriormente existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|A_n g - g^*\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$ para $n \geq n_0$. Sea $n \geq n_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\|A_n f - f^*\|_1 &\leq \|A_n f - A_n g\|_1 + \|A_n g - g^*\|_1 + \|g^* - f^*\|_1 \\
&\leq \|A_n(f - g)\|_1 + \|A_n g - g^*\|_1 + \|(f - g)^*\|_1 \\
&\leq \|f - g\|_1 + \|A_n g - g^*\|_1 + \|f - g\|_1 \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Observación 1.29. El resultado anterior es falso para espacios de medida infinita, como vamos a ver con el siguiente ejemplo. Sea $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \#)$, donde $\#$ es la medida contadora. Definamos la transformación $\tau : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\tau(k) = k + 1$, que como sabemos conserva la medida. Entonces por el Teorema 1.23, para cada $f \in L^1(\#)$ existe $f^* \in L^1(\#)$ tal que $A_n f \longrightarrow f^*$ en casi todo punto. Supongamos que el Teorema 1.28 es cierto para espacios de medida infinita, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n f - f^*\|_1 = 0.$$

Como τ es ergódica y el espacio es de medida infinita, entonces por el Teorema 1.25 tenemos que $f^* = 0$ en casi todo punto. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{Z}} \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k(x))\right| d\# = 0.$$

Si suponemos $f \geq 0$, entonces

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{Z}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k(x)) d\# = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{Z}} f(\tau^k(x)) d\# = \int_{\mathbb{Z}} f d\#.$$

Entonces necesariamente f es la función nula en casi todo punto. Hemos probado así que la única función no negativa para la que se cumple el Teorema 1.28 es la función nula en casi todo punto.

Aplicando la desigualdad del Teorema 1.18 podremos probar que $A_n f$ convergen en $L^p(\mu)$ para toda $f \in L^p(\mu)$.

Teorema 1.30. *(***Teorema de Von Neumann***) Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Si $f \in L^p(\mu)$ con $1 < p < \infty$, entonces $A_n f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k(x))$ converge en $L^p(\mu)$.*

Demostración: Sea $f \in L^p(\mu)$ con $1 < p < \infty$, entonces aplicando el Teorema 1.23 obtenemos que existe f^* tal que $A_n f \longrightarrow f^*$ en casi todo punto. Veamos que $\lim_{n\to\infty} \|A_n f - f^*\|_p = 0$. Observemos que $|A_n f(x)| \leq \mathcal{M} f(x)$ para todo $x \in X$, y aplicando el Teorema 1.18 tenemos que $\|\mathcal{M} f\|_p \leq C_p \|f\|_p < \infty$. Por tanto $\mathcal{M} f \in L^p(\mu)$ y podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada en $L^p(\mu)$, lo que concluye la prueba. □

Como consecuencia inmediata obtenemos la convergencia en medida de las medias $A_n f$ para toda $f \in L^p(\mu)$, ya que la convergencia en $L^p(\mu)$ implica la convergencia en medida.

Corolario 1.31. *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Si $f \in L^p(\mu)$ con $1 < p < \infty$, entonces $A_n f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k(x))$ converge en medida.*

Capítulo 2

Convergencia Cesàro α

El propósito de este segundo capítulo es introducir la convergencia Cesàro α, que será el objeto de estudio en el Capítulo 4 en el ámbito de la Teoría Ergódica. En la primera sección se introduce el concepto de método de convergencia regular y se prueban algunas de sus propiedades básicas. En la siguiente sección se generaliza la convergencia Cesàro de sucesiones, y se define un método regular, denotado por (C, α), para cada $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$. También probamos algunas condiciones necesarias para la convergencia (C, α). Seguidamente se estudia la relación de la convergencia Cesàro α con la teoría de series divergentes. En la última sección se define la sumabilidad Abel y se prueba una relación con la sumabilidad (C, α). Por último se exponen sin prueba algunos teoremas tauberianos. Para elaborar este capítulo se han seguido los libros de *Zygmund* [17], *Hardy* [7] y *Duren* [4].

1. Métodos de convergencia

Es conocido el concepto de convergencia de sucesiones, y, como sabemos, existen sucesiones que no convergen. Vamos a definir procesos de convergencia más generales que permiten asociarles un límite a estas sucesiones, de manera que las sucesiones convergentes en el sentido usual sigan teniendo el mismo límite con estos nuevos procesos.

Sean $M = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ una matriz infinita y $\{s_n\}$ una sucesión numérica. Entonces a esta sucesión le asociamos una nueva sucesión $\{\sigma_n\}$ dada por

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k$$

para cada $n = 0, 1, ...$, suponiendo que para cada cada n dicha serie converge. Esta matriz define un método de convergencia, en el sentido de la siguiente definición.

Definición 2.1. Si la sucesión $\{\sigma_n\}$ tiene límite s, entonces decimos que la sucesión $\{s_n\}$ es **convergente** M con límite s.

Definición 2.2. Supongamos que los números

$$N_n = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \qquad \text{y} \qquad A_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$$

existen y son finitos para todo n. La matriz M se dice que es **regular**, o que el método de convergencia que define M es regular, si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ para todo $k = 0, 1, 2...$
2. La sucesión $\{N_n\}$ es acotada.
3. $\lim_{n\to\infty} A_n = 1$.

Si todos los a_{nk} son no negativos se dice que M es una **matriz regular positiva**.

Observación 2.3. Observemos que si los N_n son finitos, entonces los A_n son finitos. Además, si la matriz M es positiva, entonces la condición 2 es consecuencia de 3, ya que $A_n = N_n$.

Teorema 2.4. *Sea M una matriz regular, y $\{s_n\}$ una sucesión, supongamos que existe s finito tal que $s_n \longrightarrow s$, entonces $\sigma_n \longrightarrow s$.*

Demostración: Podemos escribir $s_k = s + \eta_k$, con $\eta_k \longrightarrow 0$. Entonces tenemos la siguiente descomposición $\sigma_n = \sigma'_n + \sigma''_n$, donde $\sigma'_n = sA_n$ y $\sigma''_n = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k a_{nk}$. Como M es matriz regular entonces $A_n \longrightarrow 1$, luego $\sigma'_n \longrightarrow s$. Veamos ahora que $\sigma''_n \longrightarrow 0$. Sea N una cota superior de $\{N_n\}$, y $\varepsilon > 0$. Como $\eta_k \longrightarrow 0$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k > k_0$ entonces $|\eta_k| < \frac{\varepsilon}{2N}$. Por tanto

$$|\sigma''_n| \leq \sum_{k=0}^{k_0} |\eta_k||a_{nk}| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |\eta_k||a_{nk}| \leq \sum_{k=0}^{k_0} |\eta_k||a_{nk}| + \frac{\varepsilon}{2N} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |a_{nk}|.$$

El primer sumando tiende a 0 cuando $n \to \infty$ por la propiedad 1 de las matrices regulares, por lo tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces $\sum_{k=0}^{k_0} |\eta_k||a_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2}$. El segundo sumando verifica $\frac{\varepsilon}{2N} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |a_{nk}| \leq \frac{\varepsilon}{2N} N = \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto si $n > n_0$ tenemos $|\sigma''_n| < \varepsilon$, es decir, $\sigma''_n \longrightarrow 0$. Con esto queda probado que $\sigma_n \longrightarrow s$. □

Observación 2.5. Si $s = 0$ entonces no hace falta suponer 3 para obtener el resultado, ya que entonces $\sigma_n = \sigma''_n$, y la condición 3 unicamente ha sido necesaria para la convergencia de σ'_n.

Teorema 2.6. *Sea M una matriz regular positiva, entonces*

$$\liminf_{n\to\infty} s_n \leq \liminf_{n\to\infty} \sigma_n \leq \limsup_{n\to\infty} \sigma_n \leq \limsup_{n\to\infty} s_n \tag{2.1}$$

para cualquier sucesión $\{s_n\}$ para la cual $\{\sigma_n\}$ esté definida. En particular, si M es positiva el Teorema 2.4 es cierto para $s = +\infty$ y $s = -\infty$.

Demostración: Sean $\liminf_{n\to\infty} s_n = \underline{s}$, $\limsup_{n\to\infty} s_n = \overline{s}$. Probemos que $\limsup \sigma_n \leq \overline{s}$. Si $\overline{s} = +\infty$, entonces la desigualdad es evidente, supongamos pues $\overline{s} < +\infty$. Sea $\alpha > \overline{s}$. entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k > k_0$ entonces $s_k < \alpha$, aplicando la propiedad 1 de matrices regulares tenemos

$$\sigma_n \leq o(1) + \alpha(a_{n,k_0+1} + a_{n,k_0+2} + ...) = o(1) + \alpha(A_n + o(1)).$$

Ahora teniendo en cuenta que M es matriz regular y por tanto $\lim_{n\to\infty} A_n = 1$, tenemos que $\limsup \sigma_n \leq \alpha$, y como esto es válido para todo $\alpha > \overline{s}$, entonces $\limsup \sigma_n \leq \overline{s}$. La desigualdad $\underline{s} \leq \liminf \sigma_n$ se prueba análogamente. □

2. Convergencia Cesàro generalizada

Dada una sucesión $\{s_n\}$, se dice que es convergente en el sentido de Cesàro si existe el límite de las medias aritméticas, esto es, $\lim_{n\to\infty} \frac{s_1+s_2+...+s_n}{n}$. Este método es un método de convergencia regular, ya que la matriz es $A = (a_{nk})$ con $a_{nk} = \frac{1}{n}$, donde $k \leq n$ y $a_{nk} = 0$ en otro caso. Esta matriz es positiva y verifica trivialmente las propiedades de matriz regular. En esta sección generalizaremos la convergencia Cesàro y daremos un proceso de convergencia para cada $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$.

Teorema 2.7. *Sean $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, y $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ dos sucesiones y sean*

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k, \qquad Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k$$

donde $q_n > 0$ para todo n, y además $Q_n \longrightarrow \infty$. Bajo estas condiciones, si $\frac{p_n}{q_n} \longrightarrow s$, entonces $\frac{P_n}{Q_n} \longrightarrow s$.

Demostración: Sean $s_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ y $\sigma_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$. Entonces,

$$\sigma_n = \frac{p_0 + p_1 + ... + p_n}{Q_n} = \frac{s_0q_0 + s_1q_1 + ... + s_nq_n}{Q_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{q_k}{Q_n} s_k.$$

Entonces los σ_n son las medias lineales asociadas a $\{s_k\}$, veamos que la matriz asociada es regular. Es una matriz positiva, pues $q_k > 0$ para todo n. Además, como $\lim_{n\to\infty} Q_n = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{q_i}{Q_n} = 0$ para cada i. Por último para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n} \frac{q_i}{Q_n} = \frac{Q_n}{Q_n} = 1$, luego $\lim_{n\to\infty} \frac{q_0+...+q_n}{Q_n} = 1$. Por tanto, aplicando el Teorema 2.6 obtenemos que $s \leq \underline{\sigma} \leq \overline{\sigma} \leq s$, luego $\overline{\sigma} = \underline{\sigma} = s$, y por tanto hemos probado que $\sigma_n = \frac{P_n}{Q_n} \longrightarrow s$. □

Observación 2.8. Observemos que si tomamos $q_k = 1$ para todo k, obtenemos el conocido resultado para la convergencia Cesàro, si $s_n \longrightarrow s$, entonces $\frac{s_0+...+s_n}{n+1} \longrightarrow s$, es decir, que la convergencia ordinaria implica la convergencia en el sentido Cesàro. Esto justifica la siguiente definición.

Definición 2.9. Dada una sucesión $\{s_n\}_{k=0}^{\infty}$, definimos para cada $k = 0, 1, 2...$ la sucesión $\{S_n^k\}$ dada por:

$$S_n^0 = s_n, \qquad S_n^k = S_0^{k-1} + S_1^{k-1} + ... + S_n^{k-1} \qquad (k \geq 1).$$

Análogamente, para cada $k = 0, 1, 2...$ definimos la sucesión $\{A_n^k\}$ dada por:

$$A_n^0 = 1, \qquad A_n^k = A_0^{k-1} + A_1^{k-1} + ... + A_n^{k-1} \qquad (k \geq 1).$$

Decimos que la sucesión $\{s_n\}$ es **convergente por la k-ésima media aritmética de Cesàro**, o simplemente **convergente** (C, k) al límite s, si se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^k}{A_n^k} = s.$$

Observemos que la convergencia $(C, 0)$ es la convergencia ordinaria de sucesiones. Si en el Teorema 2.7 tomamos $p_n = S_n^k$ y $q_n = A_n^k$ obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.10. *La convergencia (C,k) de una sucesión implica convergencia $(C,k+1)$ al mismo límite.*

Para calcular los valores numéricos de A_n^k usaremos el siguiente resultado sobre series de potencias.

Teorema 2.11. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión, y $A_n = a_0 + ... + a_n$ para todo n. Entonces si $|x| < 1$, se verifica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

suponiendo que una de las series converge.

Demostración: Supongamos primero que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ converge, entonces

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n =& \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+1} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1})x^n \\ =& a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.\end{aligned}$$

Análogamente, si $|x| < 1$, y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge, entonces

$$\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0 + ... + a_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n.$$

□

Aplicando este resultado a A_n^k y S_n^k obtenemos,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} A_n^k x^n =& \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{k-1} x^n = \frac{1}{(1-x)^2}\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{k-2} x^n = \cdots = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n =& \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{k-1} x^n = \frac{1}{(1-x)^2}\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{k-2} x^n = \cdots = \frac{1}{(1-x)^k}\sum_{n=0}^{\infty} S_n^0 x^n.\end{aligned}$$

Esto nos permite ampliar nuestra definición, ya que los términos $\dfrac{1}{(1-x)^k}, \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$ tienen sentido para todo $k \in \mathbb{R}$, y por tanto podemos definir los A_n^k y S_n^k como los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de esa función.

Definición 2.12. Sean $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ y $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión. Se dice que la sucesión $\{s_n\}$ es **convergente** (C,α) con límite s, si

$$\sigma_n^{\alpha} = \frac{S_n^{\alpha}}{A_n^{\alpha}} \longrightarrow s$$

cuando $n \to \infty$, donde S_n^{α} y A_n^{α} vienen dados por las expresiones

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha} x^n = \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{\alpha} x^n = \frac{1}{(1-x)^{\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \end{cases}. \tag{2.2}$$

Se denota $(C,\alpha)\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Los números S_n^α y σ_n^α se llaman respectivamente **sumas de Cesàro** y **medias de Cesàro de orden** α de la sucesión $\{s_k\}$. Los A_n^α son llamados **números de Cesàro de orden** α.

Observación 2.13. Debemos interpretar la segunda igualdad de (2.2) formalmente, es decir, siempre que la suma de la derecha tenga sentido se definen los coeficientes S_n^α como el desarrollo en serie de potencias de la función de la derecha. Sin embargo, como veremos a continuación, la definición de los S_n^α solo depende se los coeficientes A_n^α y no de la sucesión $\{s_n\}$.

Observación 2.14. A diferencia de la Definición 2.9, en esta definición α no tiene porqué ser un entero no negativo, la única restricción es $\alpha \neq -1, -2, ...$, ya que si α fuera algún entero negativo, entonces $\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}}$ sería un polinomio, y por lo tanto A_n^α sería 0 para n suficientemente grande, lo cual no nos permite definir σ_n^α. Nosotros estudiaremos el caso $\alpha > -1$.

De las definiciones de A_n^α y S_n^α, y del producto de Cauchy para series, se sigue que para todo α y β se tienen las siguientes expresiones:

$$A_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha A_{n-k}^\beta, \tag{2.3}$$

$$S_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{k=0}^{n} S_k^\alpha A_{n-k}^\beta. \tag{2.4}$$

En particular, para $\alpha - 1$ y $\beta = 0$ obtenemos las siguientes expresiones recursivas

$$A_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha-1}, \quad S_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} S_k^{\alpha-1}. \tag{2.5}$$

De estas expresiones se deducen las relaciones $A_n^\alpha - A_{n-1}^\alpha = A_n^{\alpha-1}$, y $S_n^\alpha - S_{n-1}^\alpha = S_n^{\alpha-1}$. Sustituyendo $\alpha = -1$ en (2.4) y aplicando las relaciones anteriores obtenemos la siguiente fórmula para los S_n^β

$$\begin{aligned} S_n^\beta =& \sum_{k=0}^{n} S_k^{-1} A_{n-k}^\beta = \sum_{k=0}^{n} (s_k - s_{k-1}) A_{n-k}^\beta = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\beta s_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-k-1}^\beta s_k \\ =& A_0^\beta s_n + \sum_{k=0}^{n-1} \left(A_{n-k}^\beta - A_{n-k-1}^\beta \right) s_k = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} s_k, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\sigma_n^\beta = \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} s_k. \tag{2.6}$$

De la definición de los A_n^α, $\sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n = \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}}$, obtenemos que si $\alpha \neq -1, -2, ...$ entonces

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n)}{n!} = \binom{n+\alpha}{n}. \tag{2.7}$$

Ahora que hemos calculado los coeficientes A_n^α y tenemos la expresión (2.6) para σ_n^α, podemos escribir la Definición 2.12 de forma más simple.

Definición 2.15. Una sucesión $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ se dice que es **convergente** (C,α) con límite s, si

$$\sigma_n^{\alpha} = \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} s_k \longrightarrow s \tag{2.8}$$

cuando $n \to \infty$, donde $A_n^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n}$ y $A_0^{\alpha} = 1$.

Como consecuencia de haber calculado los coeficientes A_n^{α} explícitamente en (2.7), obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.16.

1. *Si $\alpha > -1$, entonces A_n^{α} es positivo.*
2. *Si $\alpha > 0$, entonces A_n^{α} es creciente como función de n.*
3. *Si $-1 < \alpha < 0$, entonces A_n^{α} es decreciente como función de n.*
4. *$A_n^0 = 1$ para todo n.*
5. *Si $\alpha < -1$, A_n^{α} es de signo constante para n suficientemente grande.*

Proposición 2.17. *Se tiene la siguiente estimación sobre los coeficientes A_n^{α},*

$$A_n^{\alpha} \simeq \frac{n^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \tag{2.9}$$

es decir, existen $C_1, C_2 > 0$ tales que para n grande se tiene

$$C_1 \frac{n^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \leq A_n^{\alpha} \leq C_2 \frac{n^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

donde Γ representa la función Gamma.

Demostración: Vamos a probar $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^{\alpha}}{\binom{n+\alpha}{n}\Gamma(\alpha+1)} = 1$. Consideremos la siguiente sucesión de funciones de variable compleja $F_n(z) = \dfrac{n^z n!}{z(z+1)(z+2)...(z+n)}$, y veamos que $\lim_{n\to\infty} F_n(z) = \Gamma(z)$. Primero probaremos que $\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = F_n(z)$, para ello vamos a hacer el cambio de variables $t = ns$ y luego integraremos por partes n veces con $u = (1-s)^n$ y $dv = s^{z-1}ds$,

$$\begin{aligned}
\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt =& n^z \int_0^1 (1-s)^n s^{z-1} ds \\
=& n^z \left\{ \left[(1-s)^n \frac{s^z}{z} \right]_{s=0}^{s=1} + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-s)^{n-1} s^z ds \right\} \\
=& n^z \frac{n}{z} \int_0^1 (1-s)^{n-1} s^z ds \\
=& n^z \frac{n}{z} \left\{ \left[(1-s)^{n-1} \frac{s^{z+1}}{z+1} \right]_{s=0}^{s=1} + \frac{n-1}{z+1} \int_0^1 (1-s)^{n-2} s^{z+1} ds \right\} = ... \\
=& n^z \frac{n}{z} \frac{n-1}{z+1} \frac{n-2}{z+2} ... \frac{1}{z+n-1} \int_0^1 s^{z+n-1} ds \\
=& n^z \frac{n!}{z(z+1)(z+2)...(z+n)} = F_n(z).
\end{aligned}$$

Tomando límite y aplicando el teorema de la convergencia dominada obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} F_n(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = \int_0^n e^{-t}t^{z-1}dt = \Gamma(z).$$

Aplicando esto a $z = \alpha$ obtenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)} = \Gamma(\alpha)$. Por tanto $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)} = \alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$, que es lo que queríamos probar.
Una vez probado esto, podemos encontrar $C_1, C_2 > 0$ cercanos a 1, tales que

$$C_1\frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq A_n^\alpha \leq C_2\frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

para n grande. □

Observación 2.18. Como consecuencia de la Proposición 2.17 obtenemos que si $\alpha < -1$ entonces $\sum_{n=0}^\infty |A_n^\alpha| < \infty$.

Teorema 2.19. *Si $\alpha > 0$, entonces la convergencia (C,α) es un método regular.*

Demostración: Observemos que la convergencia Cesàro α está asociada a la matriz $\{a_{nk}\}$ donde $a_{nk} = \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}$ si $k \leq n$ y $a_{nk} = 0$ si $k > n$. Veamos que esta matriz es regular. Observemos en primer lugar que como $\alpha > 0$ entonces $\alpha - 1 > -1$ y por tanto aplicando la Proposición 2.16 obtenemos que la matriz $\{a_{nk}\}$ es positiva. Si $k \leq n$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} = 0$ por la estimación de la Proposición 2.17. Si $k > n$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicando (2.5) tenemos $A_n = \sum_{k=0}^\infty a_{nk} = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^n A_k^{\alpha-1} = \frac{1}{A_n^\alpha}A_n^\alpha = 1$, y por tanto $\lim_{n\to\infty} A_n = 1$. Hemos probado así que la matriz $\{a_{nk}\}$ es una matriz regular positiva. □

2.1. Propiedades de la convergencia Cesàro α

En esta parte vamos a estudiar las propiedades de la convergencia usual de sucesiones que se mantienen para la convergencia Cesàro α.

Teorema 2.20. *Sean $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ dos sucesiones. Supongamos que x_n e y_n convergen (C,α), entonces $\{x_n+y_n\}_{n=0}^\infty$ converge (C,α). Además, si $(C,\alpha)\lim x_n = x$ y $(C,\alpha)\lim y_n = y$, entonces $(C,\alpha)\lim(x_n+y_n) = x+y$.*

Demostración: Sean σ_n^x, σ_n^y y σ_n^{x+y} las medias de Cesàro de orden α de $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ y $\{x_n+y_n\}_{n=0}^\infty$ respectivamente. Entonces, basta observar

$$\sigma_n^{x+y} = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1}(x_k+y_k) = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1}x_k + \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1}y_k = \sigma_n^x + \sigma_n^y,$$

y aplicar la propiedad análoga para la convergencia usual de sucesiones. □

Observación 2.21. Observemos que la propiedad equivalente para el producto es falsa. Si tomamos $x_n = y_n = (-1)^n$ y estudiamos la convergencia $(C,1)$, entonces tenemos que $(C,1)\lim x_n = (C,1)\lim y_n = 0$ y $(C,1)\lim x_n y_n = (C,1)\lim 1 = 1$.

Proposición 2.22. *Sean $\alpha \geq 0$ y $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión tal que $(C,\alpha)\lim|x_n| = 0$. Entonces $(C,\alpha)\lim x_n = 0$.*

Demostración: Sea σ_n^α la sucesión de medias de Cesàro de orden α de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, entonces

$$|\sigma_n^\alpha| = \left| \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} x_k \right| \leq \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} |x_k| \longrightarrow 0,$$

donde hemos usado que $\alpha \geq 0$, y por tanto por la Proposición 2.16 los coeficientes de Cesàro son positivos. □

Observación 2.23. El recíproco del resultado anterior es falso, para ello basta considerar la sucesión $a_n = (-1)^n$.

Observación 2.24. Observemos que si $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión tal que $(C,\alpha)\lim x_n = x$, y $\{x_{n_k}\}_{k=0}^\infty$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, entonces no necesariamente $(C,\alpha)\lim x_{n_k} = x$. Por ejemplo, consideremos $x_n = (-1)^n$, como sabemos $(C,1)\lim x_n = 0$. Sin embargo, si tomamos la subsucesión $x_{2k} = (-1)^{2k} = 1$, entonces $(C,1)\lim x_{2k} = 1$.

Teorema 2.25. *Sean $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión y $\alpha > 0$. Si $\{s_n\}$ converge (C,α), entonces $s_n = o(n^\alpha)$.*

Demostración: Sea $s = (C,\alpha)\lim s_n$. Podemos suponer $s = 0$, ya que en otro caso basta considerar la sucesión $\{s_n - s\}$, y por el Teorema 2.20 tenemos $(C,\alpha)\lim(s_n - s) = 0$. Si probamos el Teorema para $s = 0$, entonces tendremos $\frac{s_n - s}{n^\alpha} \longrightarrow 0$, y por tanto necesariamente $\frac{s_n}{n^\alpha} \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$. Supongamos entonces $\sigma_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} s_k \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces aplicando (2.4) tenemos

$$s_n = S_n^0 = S_n^{\alpha+(-\alpha-1)+1} = \sum_{k=0}^{n} S_k^\alpha A_{n-k}^{-\alpha-1} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{-\alpha-1} A_k^\alpha \sigma_k^\alpha.$$

Por tanto, podemos escribir

$$\frac{s_n}{A_n^\alpha} = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{-\alpha-1} A_k^\alpha \sigma_k^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k^\alpha}{A_n^\alpha} A_{n-k}^{-\alpha-1} \sigma_k^\alpha.$$

Sea $A = \left(\frac{A_k^\alpha}{A_n^\alpha} A_{n-k}^{-\alpha-1} \right)_{n,k=0}^\infty$, donde entendemos $A_{n-k}^{-\alpha-1} = 0$ si $n < k$. Vamos a probar que la matriz A verifica las condiciones 1 y 2 de matriz regular, y por tanto como $\sigma_n^\alpha \longrightarrow 0$ aplicando el Teorema 2.4 tendremos probado que $\frac{s_n}{A_n^\alpha} \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces usando la Proposición 2.17 tendremos $s_n = o(n^\alpha)$.

1. Utilizando la Proposición 2.17 tenemos que para n suficientemente grande existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 \frac{k^\alpha}{n^\alpha} (n-k)^{-\alpha-1} \leq \frac{A_k^\alpha}{A_n^\alpha} A_{n-k}^{-\alpha-1} \leq C_2 \frac{k^\alpha}{n^\alpha} (n-k)^{-\alpha-1}.$$

Entonces como $\alpha > 0$ tenemos

$$\frac{A_k^\alpha}{A_n^\alpha} A_{n-k}^{-\alpha-1} \leq C_2 \frac{k^\alpha}{n^\alpha} (n-k)^{-\alpha-1} = C_2 k^\alpha \frac{1}{n^\alpha (n-k)^{\alpha+1}} \longrightarrow 0$$

cuando $n \to \infty$. Por el otro lado,

$$\frac{A_k^\alpha}{A_n^\alpha}A_{n-k}^{-\alpha-1} \geq C_1\frac{k^\alpha}{n^\alpha}(n-k)^{-\alpha-1} = C_1 k^\alpha \frac{1}{n^\alpha(n-k)^{\alpha+1}} \longrightarrow 0$$

cuando $n \to \infty$. Hemos probado entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{A_k^\alpha}{A_n^\alpha}A_{n-k}^{-\alpha-1} = 1$.

2. Como $\alpha \geq 0$, entonces por la Proposición 2.16 tenemos $A_n^\alpha \geq A_k^\alpha > 0$ para todo $k \leq n$, y por tanto tenemos

$$N_n = \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{A_{n-k}^{-\alpha-1}A_k^\alpha}{A_n^\alpha}\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\left|A_{n-k}^{-\alpha-1}\right| = \sum_{k=0}^{n}\left|A_k^{-\alpha-1}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|A_k^{-\alpha-1}\right| < \infty$$

□

Teorema 2.26. *Si una sucesión es convergente (C,α) con límite s, para un $\alpha > -1$, entonces también es convergente $(C,\alpha+h)$ con límite s, para todo $h > 0$.*

Demostración: Sean σ_n^α las medias de Cesàro de orden α de la sucesión. Entonces utilizando (2.6) y la definición de σ_n^α podemos escribir

$$\sigma_n^{\alpha+h} = \frac{\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{h-1}S_k^\alpha}{A_n^{\alpha+h}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{A_{n-k}^{h-1}A_k^\alpha}{A_n^{\alpha+h}}\sigma_k^\alpha.$$

Hemos obtenido así que $\sigma_n^{\alpha+h}$ son medias lineales de σ_n^α, razonando como en el teorema anterior se prueba que la matriz asociada es regular para $\alpha > -1$ y $h > 0$. Ahora basta aplicar el Teorema 2.4 y obtenemos que $\sigma_n^{\alpha+h}$ converge a s. □

Ejemplo 2.27. Sea $0 < \beta < 1$. Veamos que la sucesión $a_n = (-1)^n n^\beta$ converge (C,α) para todo $\alpha > \beta$, pero no converge (C,α) para $\alpha \leq \beta$.
Sea $\beta < \alpha \leq 1$, veamos que $\{a_n\}$ converge (C,α).

$$\begin{aligned}\sigma_n^\alpha =& \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}(-1)^k k^\beta \\ =& \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}(-1)^k\left(k^\beta-(k+1)^\beta\right) + \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}(-1)^k(k+1)^\beta.\end{aligned}$$

Estudiemos el primer sumando, probemos en primer lugar que $\lim_{n\to\infty}(n^\beta-(n+1)^\beta) = 0$. Para ello basta con aplicar el teorema del valor medio a $f(x) = x^\beta$ en $[n, n+1]$ y obtenemos $|n^\beta - (n+1)^\beta| \leq \beta(n+1)^{\beta-1} \longrightarrow 0$, ya que $\beta - 1 < 0$. Por tanto $\lim_{n\to\infty}(-1)^n(n^\beta - (n+1)^\beta) = 0$, y esto implica que el primer sumando tiende a 0. Estudiemos el segundo sumando,

$$\begin{aligned}\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}(-1)^k(k+1)^\beta =& \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}A_{n-k}^{\alpha-1}(-1)^k(k+1)^\beta + \frac{1}{A_n^\alpha}(-1)^n(n+1)^\beta \\ =& \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\left(A_{n-k}^{\alpha-1}-A_{n-k-1}^{\alpha-1}\right)(-1)^k(k+1)^\beta \\ &+ \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}A_{n-k-1}^{\alpha-1}(-1)^k(k+1)^\beta + \frac{1}{A_n^\alpha}(-1)^n(n+1)^\beta \\ =& A_n + B_n + C_n.\end{aligned}$$

Estudiemos cada sumando por separado. Es claro que $C_n \longrightarrow 0$ ya que $\beta < \alpha$. Para el primer sumando tenemos

$$|A_n| = \left| \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \left(A_{n-k}^{\alpha-1} - A_{n-k-1}^{\alpha-1} \right) (-1)^k (k+1)^\beta \right| = \left| \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-k}^{\alpha-2} (-1)^k (k+1)^\beta \right|$$
$$\leq \frac{n^\beta}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} |A_{n-k}^{\alpha-2}| = \frac{n^\beta}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} |A_k^{\alpha-2}| \leq \frac{n^\beta}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} |A_k^{\alpha-2}| \leq C \frac{n^\beta}{A_n^\alpha} \longrightarrow 0,$$

ya que $\beta < \alpha$ y $\sum_{k=0}^{\infty} |A_k^{\alpha-2}| = C < \infty$, porque $\alpha - 2 < -1$. Por último,

$$B_n = -\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-k-1}^{\alpha-1} (-1)^{k-1} (k+1)^\beta = -\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} (-1)^k k^\beta$$
$$= -\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} (-1)^k k^\beta = -\sigma_n^\alpha.$$

Juntando todas estas estimaciones tenemos,

$$\sigma_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} (-1)^k \left(k^\beta - (k+1)^\beta \right) + A_n - \sigma_n^\alpha + C_n,$$

y por tanto, $2\sigma_n^\alpha \longrightarrow 0$. Esto prueba que $\{a_n\}$ converge (C, α) a 0 para todo $\beta < \alpha \leq 1$. Entonces, por el Teorema 2.26 converge (C, β) para todo $\beta > \alpha$. Sin embargo no converge (C, α) para $\alpha \leq \beta$, para ello, por el Teorema 2.25, basta observar que $\left| \frac{(-1)^n n^\beta}{n^\alpha} \right| = n^{\beta-\alpha} \longrightarrow \infty$, ya que $\beta - \alpha > 0$.

Ejemplo 2.28. Sea $0 < \alpha \leq 1$. Vamos a dar un ejemplo de una sucesión que converge (C, α) y no converge (C, β) para $\beta < \alpha$. Consideremos la sucesión $a_n = \frac{(-1)^n n^\alpha}{\log(n+2)}$, veamos que converge (C, α). Podemos escribir,

$$\sigma_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} (-1)^k \frac{k^\alpha}{\log(k+2)} = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} (-1)^k \left(\frac{k^\alpha}{\log(k+2)} - \frac{(k+1)^\alpha}{\log(k+3)} \right)$$
$$+ \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} (-1)^k \frac{(k+1)^\alpha}{\log(k+3)} = I_n + II_n.$$

Observemos que $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^\alpha}{\log(n+2)} - \frac{(n+1)^\alpha}{\log(n+3)} \right) = 0$, para probarlo basta aplicar el teorema del valor medio a $f(x) = \frac{x^\alpha}{\log(x+2)}$ en $[n, n+1]$ y observar que $\alpha - 1 < 0$. Tenemos entonces que $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(\frac{n^\alpha}{\log(n+2)} - \frac{(n+1)^\alpha}{\log(n+3)} \right) = 0$, y por tanto aplicando el Teorema 2.19 y el Teorema 2.4 tenemos $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. Estudiemos ahora II_n,

$$II_n = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-k}^{\alpha-1} (-1)^k \frac{(k+1)^\alpha}{\log(k+3)} + \frac{(-1)^n (n+1)^\alpha}{A_n^\alpha \log(n+3)}$$
$$= \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \left(A_{n-k}^{\alpha-1} - A_{n-k-1}^{\alpha-1} \right) (-1)^k \frac{(k+1)^\alpha}{\log(k+3)}$$
$$+ \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-k-1}^{\alpha-1} (-1)^k \frac{(k+1)^\alpha}{\log(k+3)} + \frac{1}{A_n^\alpha} (-1)^n \frac{(n+1)^\alpha}{\log(n+3)}$$
$$= A_n + B_n + C_n.$$

Estudiemos cada sumando por separado, aplicando que $f(x)$ es creciente para x suficientemente grandes, tenemos que para n suficientemente grande

$$\begin{aligned}|A_n| &= \left|\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n-1} A_{n-k}^{\alpha-2}(-1)^k\frac{(k+1)^\alpha}{\log(k+3)}\right| \leq \frac{n^\alpha}{A_n^\alpha\log(n+2)}\sum_{k=0}^{n-1}|A_{n-k}^{\alpha-2}| \\ &= \frac{n^\alpha}{A_n^\alpha\log(n+2)}\sum_{k=0}^{n-1}|A_k^{\alpha-2}| \leq \frac{n^\alpha}{A_n^\alpha\log(n+2)}\sum_{k=0}^{\infty}|A_k^{\alpha-2}| \leq \frac{C}{\log(n+2)} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Para el segundo sumando tenemos,

$$\begin{aligned}B_n &= -\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n-1} A_{n-k-1}^{\alpha-1}(-1)^{k-1}\frac{(k+1)^\alpha}{\log(k+3)} = -\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1}(-1)^k\frac{k^\alpha}{\log(k+2)} \\ &= -\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1}(-1)^k\frac{k^\alpha}{\log(k+2)} = -\sigma_n^\alpha.\end{aligned}$$

Y $C_n \longrightarrow 0$ trivialmente. Entonces tenemos

$$\sigma_n^\alpha = I_n + II_n = I_n + A_n + B_n + C_n = I_n + A_n + C_n - \sigma_n^\alpha,$$

y por tanto, $2\sigma_n^\alpha \longrightarrow 0$. Esto prueba que a_n converge (C,α) y por tanto usando el Teorema 2.26 tenemos que a_n converge (C,β) para todo $\beta \geq \alpha$. Sin embargo, si $\beta < \alpha$, entonces $\left|\frac{a_n}{n^\alpha}\right| = \frac{n^{\alpha-\beta}}{\log(n+2)} \longrightarrow \infty$, ya que $\alpha - \beta > 0$. Y por tanto, en vista del Teorema 2.25 tenemos que a_n no converge (C,β).

2.2. Sumabilidad Cesàro α

Lo análogo a lo que hemos visto para sucesiones se puede definir para series numéricas $\sum u_n$, para ello basta aplicar las definiciones de convergencia Cesàro α a la sucesión de sumas parciales. Sea $\sum u_n$ una serie y $\{s_k\}$ su sucesión de sumas parciales, entonces observemos que por la definición de los coeficientes S_n^α tenemos $S_n^{-1} = u_n$.

Definición 2.29. Sea $\sum u_n$ una serie y $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ su sucesión de sumas parciales, se dice que es **sumable** (C,α) con suma s, si

$$\sigma_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1}s_k = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha}u_k \longrightarrow s \tag{2.10}$$

cuando $n \to \infty$, donde $A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}$ y $A_0^\alpha = 1$. En este caso, escribimos $(C,\alpha)\sum u_n = s$

De la misma forma el Teorema 2.25 se prueba este resultado, que es el análogo para series.

Teorema 2.30. *Si una serie* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *es sumable* (C,α), *con* $\alpha > -1$, *entonces* $u_n = o(n^\alpha)$.

Las mismas propiedades que se tienen para la convergencia Cesàro α se tienen para la sumabilidad Cesàro α, para probarlas basta aplicar las conocidas para sucesiones a la sucesión de sumas parciales.

3. Teoremas Tauberianos

En esta última sección vamos a introducir un nuevo tipo de convergencia de series, la sumabilidad Abel, que como veremos es más débil que la sumabilidad Cesàro α con $\alpha > .1$.

Definición 2.31. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se dice que es **sumable en el sentido de Abel**, con suma s, si se verifican las dos siguientes condiciones

1. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n < +\infty$ para todo $x \in (0,1)$.
2. $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$.

En el siguiente resultado veremos que la sumabilidad Cesàro implica la Abel.

Teorema 2.32. *Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ es sumable (C, α), con $\alpha > -1$, con suma s (no necesariamente finita), entonces también es sumable Abel con suma s.*

Demostración: Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$, y sea $\{x_n\}$ una sucesión en $(0,1)$ con $x_n \longrightarrow 1$ cuando $n \to \infty$. Entonces:

$$f(x_n) = (1 - x_n)^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{\infty} S_k^{\alpha} x_n^k = (1 - x_n)^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^{\alpha} A_k^{\alpha} x_n^k.$$

La expresión de la derecha es una media lineal de la sucesión $\{\sigma_n^{\alpha}\}$ y correspondiente a la matriz $M = \{a_{nk}\}$, con $a_{nk} = A_k^{\alpha}(1 - x_n)^{\alpha+1} x_n^k$. Esta matriz es positiva y satisface las condiciones 1 y 3 de matriz regular. Entonces $f(x_n) \longrightarrow s$. □

Como sabemos, si una serie es convergente, entonces es sumable (C, α) y en vista del resultado anterior, esto implica la sumabilidad Abel. El recíproco no es cierto. Para ver esto basta considerar la serie $\sum(-1)^n$, que no es convergente, pero sí converge $(C, 1)$. Sin embargo, si suponemos alguna hipótesis adicional podemos probar el recíproco, a estos resultados se les llama teoremas tauberianos, y a la hipótesis adicional, condición tauberiana. Vamos a exponer sin demostración algunos teoremas tauberianos para la sumabilidad Cesàro α y la sumabilidad Abel.

La clave para probar los siguientes teoremas tauberianos se basa en el teorema anterior, se prueba que si la serie es sumable Abel y además cumple una condición tauberiana, entonces es sumable en el sentido usual. Luego, aplicando el teorema anterior tenemos que si la serie converge (C, α) con $\alpha > -1$, y cumple una condición tauberiana entonces es sumable. La demostración de estos resultados no se incluye en esta memoria debido a la longitud de la misma, pueden consultarse en *Duren* [4] o *Hardy* [7].

Teorema 2.33. (Teorema de Tauber) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $na_n \longrightarrow 0$. Si $(C, \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ con $\alpha > 0$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente a la suma A.*

Teorema 2.34. *(**Teorema de Hardy-Littlewood**) Sea $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ una serie y $\{S_n\}$ su sucesión de sumas parciales. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \longrightarrow A$ cuando $x \to 1^-$ y $S_n \geq 0$ para todo n, entonces $\sigma_n \longrightarrow A$ cuando $n \to \infty$, donde σ_n son las medias aritméticas de $\{S_n\}$.*

Teorema 2.35. *Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es sumable Cesàro α para algún $\alpha > -1$ y $a_n = O(\frac{1}{n})$, entonces la serie es convergente, y de hecho es sumable (C, β) para todo $\beta > -1$.*

Teorema 2.36. *(**Teorema de Hardy**) Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es sumable Cesàro α para algún $\alpha > -1$ y $\{na_n\}$ es acotada inferiormente, entonces la serie es convergente.*

Capítulo 3

Espacios de Lorentz $L(p,q)$

En este capítulo introduciremos los espacios de Lorentz $L(p,q)$. Para ello primero estudiaremos la función de distribución y el reordenamiento decreciente de una función medible. Seguidamente se definen los espacios de Lorentz y se prueban algunas de sus propiedades. Por último, introducimos algunas definiciones de la teoría de interpolación de operadores, y se prueba un resultado que será necesario en el siguiente capítulo. Para la elaboración de este capítulo se han seguido los libros de *Stein y Weiss* [14], *Bennett y Sharpley* [1] y la tesina de *Kristiansson* [9].

1. Función de distribución y reordenamiento decreciente

A lo largo de esta sección $(X, \mathcal{M}, \mu)$ denotará un espacio de medida σ-finito.

Definición 3.1. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Se define la **función de distribución de** f como la función $\mu_f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty]$ definida por

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}), \qquad \lambda \geq 0. \tag{3.1}$$

En el siguiente resultado se prueban las principales propiedades de la función de distribución.

Proposición 3.2. *Sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles. Entonces*

1. *μ_f es decreciente y continua por la derecha.*
2. *Si $|f(x)| \leq |g(x)|$ para casi todo $x \in X$, entonces $\mu_f(\lambda) \leq \mu_g(\lambda)$ para todo $\lambda \geq 0$.*
3. *$\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$ para todos $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.*

Demostración:

1. Sean $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$. Entonces

$$\{x \in X : |f(x)| > \lambda_1\} \supset \{x \in X : |f(x)| > \lambda_2\},$$

entonces obtenemos $\mu_f(\lambda_1) \geq \mu_f(\lambda_2)$. Probemos ahora que μ_f es continua por la derecha en cada $\lambda_0 \geq 0$. Para cada λ definimos el conjunto

$$A_\lambda = \{x \in X : |f(x)| > \lambda\}.$$

Para probar que μ_f es continua por la derecha en λ_0 basta con demostrar que $\lim_{n\to\infty} \mu_f(\lambda_0 + \frac{1}{n}) = \mu_f(\lambda_0)$. Consideremos la sucesión expansiva $\{A_{\lambda_0+\frac{1}{n}}\}_{n=1}^{\infty}$, que verifica

$$A_{\lambda_0} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\lambda_0+\frac{1}{n}}.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_f(\lambda_0 + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_{\lambda_0+\frac{1}{n}}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\lambda_0+\frac{1}{n}}\right) = \mu_f(\lambda_0).$$

Esto prueba que μ_f es continua por la derecha.

2. Supongamos $|f(x)| \leq |g(x)|$ para casi todo $x \in X$, entonces

$$\{x \in X : |f(x)| > \lambda\} \subset \{x \in X : |g(x)| > \lambda\}.$$

Por lo tanto, $\mu_f(\lambda) \leq \mu_g(\lambda)$, para todo $\lambda \geq 0$.

3. Este apartado es consecuencia de la siguiente relación de inclusión

$$\{x \in X : |f(x) + g(x)| > \lambda_1 + \lambda_2\} \subset \{x \in X : |f(x)| > \lambda_1\} \cup \{x \in X : |g(x)| > \lambda_2\},$$

lo que implica $\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$.

□

Ahora ya tenemos lo necesario para definir el reordenamiento decreciente de una función medible.

Definición 3.3. Se define el reordenamiento decreciente de una función medible f como la función $f^* : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty]$ definida por

$$f^*(t) = \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : \mu_f(\lambda) \leq t\}, \tag{3.2}$$

donde ínf $\emptyset$ se considera igual a ∞.

El siguiente resultado nos dice que podemos ver el reordenamiento decreciente de una función f como la función de distribución de μ_f con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Teorema 3.4. *Se da la igualdad*

$$f^*(t) = m_{\mu_f}(t), \qquad t \geq 0 \tag{3.3}$$

donde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Demostración: Como la función de distribución μ_f es decreciente, entonces $\sup\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\} = m(\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\})$. Por tanto,

$$f^*(t) = \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : \mu_f(\lambda) \leq t\} = \sup\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\} = m(\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\}) = m_{\mu_f}(t).$$

□

Como consecuencia de este resultado y de la Proposición 3.2 obtenemos las siguientes propiedades del reordenamiento decreciente.

Corolario 3.5. *Sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles. Entonces,*

1. *f^* es decreciente y continua por la derecha.*
2. *Si $|f(x)| \leq |g(x)|$ para casi todo $x \in X$, entonces $f^*(t) \leq g^*(t)$ para todo $t \geq 0$.*

En la siguiente proposición se exponen algunas propiedades del reordenamiento decreciente.

Proposición 3.6. *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces,*

1. *Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene $(\alpha f)^*(t) = |\alpha| f^*(t)$.*
2. *$f^*(t) > \lambda$ si y sólo si $\mu_f(\lambda) > t$.*
3. *f y f^* son equimedibles, esto es,*

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) = m(\{t > 0 : f^*(t) > \lambda\})$$

   para todo $\lambda \geq 0$, donde m es la medida de Lebesgue.

4. *Si $\lambda \geq 0$ y $\mu_f(\lambda) < \infty$, entonces $f^*(\mu_f(\lambda)) \geq \lambda$ y $f^*(\mu_f(\lambda)+\varepsilon) \leq \lambda$ para todo $\varepsilon > 0$. Si $t \geq 0$ y $f^*(t) < \infty$, entonces $\mu_f(f^*(t))) \leq t$ y $\mu_f(f^*(t)) - \varepsilon) \geq t$ para todo $0 < \varepsilon < f^*(t)$.*
5. *Si $0 < p < \infty$, entonces*

$$(|f|^p)^*(t) = f^*(t)^p.$$

6. *Si $A \in \mathcal{M}$, entonces $(f\chi_A)^*(t) \leq f^*(t)\chi_{[0,\mu(A))}(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Demostración:

1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}(\alpha f)^*(t) =& \text{ínf}\{\lambda > 0 : \mu_{\alpha f}(\lambda) \leq t\} = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \mu_f\left(\frac{\lambda}{|\alpha|}\right) \leq t\} \\ =& \text{ínf}\{|\alpha| u : \mu_f(u) \leq t\} = |\alpha| f^*(t).\end{aligned}$$

2. Supongamos que $\mu_f(\lambda) > t$, entonces como μ_f es decreciente y continua por la derecha, tenemos $\lambda < \text{ínf}\{\nu : \mu_f(\nu) \leq t\} = f^*(t)$. Ahora supongamos que $f^*(t) > \lambda$, es decir, $\text{ínf}\{\nu : \mu_f(\nu) \leq t\} > \lambda$. Entonces, como μ_f es decreciente obtenemos $\mu_f(\lambda) > t$.

3. Sea m la medida de Lebesgue en $[0, \infty)$. Entonces aplicando el apartado anterior,

$$\begin{aligned}m_{f^*}(\lambda) =& m(\{t \geq 0 : f^*(t) > \lambda\}) = m(\{t \geq 0 : \mu_f(\lambda) > t\}) \\ =& m([0, \mu_f(\lambda))) = \mu_f(\lambda).\end{aligned}$$

4. Supongamos que $\mu_f(\lambda) < \infty$, entonces como μ_f es decreciente tenemos

$$f^*(\mu_f(\lambda)) = \text{ínf}\{s \geq 0 : \mu_f(s) \leq \mu_f(\lambda)\} \geq \lambda.$$

   Sea $\varepsilon > 0$, entonces

$$f^*(\mu_f(\lambda) + \varepsilon) = \text{ínf}\{s \geq 0 : \mu_f(s) \leq \mu_f(\lambda) + \varepsilon\} \leq \lambda.$$

Supongamos que $f^*(t) < \infty$, entonces como μ_f es una función decreciente tenemos

$$\mu_f\left(f^*(t)\right) = \mu_f\left(\text{ínf}\left\{\lambda \geq 0 : \mu_f(\lambda) \leq t\right\}\right) \leq t.$$

Sea $0 < \varepsilon < f^*(t)$, entonces como f y f^* son equimedibles tenemos

$$\begin{aligned}\mu_f\left(f^*(t) - \varepsilon\right) &= \mu\left(\left\{x \in X : |f(x)| > f^*(t) - \varepsilon\right\}\right) \\ &= m\left(\left\{s > 0 : f^*(s) > f^*(t) - \varepsilon\right\}\right) \geq t.\end{aligned}$$

5. Sea $0 \leq \lambda < \infty$, entonces

$$\begin{aligned}(|f|^p)^*(t) &= \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)|^p > \lambda\}) \geq t\} \\ &= \text{ínf}\{\nu^p \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \nu\}) \geq t\} = f^*(t)^p.\end{aligned}$$

6. Como $(f\chi_A)(x) \leq f(x)$ para casi todo $x \in X$, entonces por el Corolario 3.5 tenemos $(f\chi_A)^*(t) \leq f^*(t)$ para todo $t \geq 0$. Por otra parte, como $\mu(\{x \in X : |(f\chi_A)(x)| > \lambda\}) \leq \mu(A)$, entonces para cada $t > \mu(A)$ tenemos $(f\chi_A)^*(t) = 0$. De estas dos estimaciones obtenemos

$$\left(f\chi_A\right)^*(t) \leq f^*(t)\chi_{[0,\mu(A))}(t).$$

□

Como consecuencia de estas propiedades podemos probar que reordenamiento decreciente es único, como vamos a ver en el siguiente resultado.

Teorema 3.7. *Existe una única función f^* continua por la derecha, decreciente y equimedible con f. Entonces, el reordenamiento decreciente es único.*

Demostración: Sean $f_1^*(t)$ y $f_2^*(t)$ dos funciones distintas, continuas por la derecha, decrecientes y equimedibles con f. Como son distintas, entonces existe t_0 tal que $f_1^*(t_0) \neq f_2^*(t_0)$, podemos suponer, sin perdida de generalidad, $f_1^*(t_0) > f_2^*(t_0)$. Por la continuidad por la derecha de f_1^* existe un intervalo no vacío $[t_0, t_1]$ tal que $f_1^*(t) > f_2^*(t_0)$ para todo $t \in [t_0, t_1]$, y por tanto como f_1^* es decreciente tenemos $f_1^*(t) > f_2^*(t_0)$ para $t \in [0, t_1]$. Usando esto y que ambas son decrecientes obtenemos

$$m(\{t \geq 0 : f_1^*(t) > f_2^*(t_0)\}) \geq t_1,$$

$$m(\{t \geq 0 : f_2^*(t) > f_2^*(t_0)\}) \leq t_2 < t_1.$$

Esto es una contradicción, ya que ambas son equimedibles con f, y por tanto f_1^* y f_2^* son equimedibles. Hemos probado entonces $f_1^*(t) = f_2^*(t)$ para todo t, y por tanto el reordenamiento decreciente es único. □

Teorema 3.8. *Supongamos que $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones medibles tales que para todo $x \in X$ se tiene $|f_k(x)| \leq |f_{k+1}(x)|$ para $k \in \mathbb{N}$. Si f es una función medible tal que $|f(x)| = \lim_{k\to\infty} |f_k(x)|$ para todo $x \in X$. Entonces,*

1. *para cada $\lambda \geq 0$, $\mu_{f_k}(\lambda) \uparrow \mu_f(\lambda)$ cuando $k \to \infty$.*
2. *para cada $t \geq 0$, $f_k^*(t) \uparrow f^*(t)$ cuando $k \to \infty$.*

Demostración: Sea $\lambda \geq 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos los siguientes conjuntos

$$E_\lambda^k = \{x \in X : |f_k(x)| > \lambda\} \subset E_\lambda = \{x \in X : |f(x)| > \lambda\}.$$

Observemos que la familia $\{E_\lambda^k\}_{k=1}^\infty$ es expansiva y $E_\lambda = \bigcup_{k=1}^\infty E_\lambda^k$. Esto implica $\mu_{f_k}(\lambda) = \mu(E_\lambda^k) \leq \mu(E_\lambda^{k+1}) = \mu_{f_{k+1}}(\lambda)$. Y por tanto

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{f_k}(\lambda) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_\lambda^k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_\lambda^k\right) = \mu(E_\lambda) = \mu_f(\lambda).$$

Esto concluye la prueba de 1. Para probar 2 basta aplicar el primer apartado a la sucesión $\{\mu_{f_k}\}$, entonces obtenemos que para cada $t \geq 0$ se tiene $m_{\mu_{f_k}}(t) \uparrow m_{\mu_f}(t)$, y por el Teorema 3.4, esto es $f_k^*(t) \uparrow f^*(t)$. □

Teorema 3.9. *Sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ medibles, entonces el reordenamiento decreciente de la suma $f + g$ verifica la siguiente desigualdad*

$$(f+g)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2) \tag{3.4}$$

para todos $t_1, t_2 \geq 0$. En particular, para $t_1 = t_2 = \frac{t}{2}$ obtenemos la siguiente desigualdad para todo $t \geq 0$

$$(f+g)^*(t) \leq f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right).$$

Demostración: Sean $t_1, t_2 \geq 0$. Supongamos que $f^*(t_1) + g^*(t_2) < \infty$, ya que en caso contrario no hay nada que probar. Aplicando la Proposición 3.2 (3) y la Proposición 3.6 (4) tenemos

$$\mu_{f+g}(f^*(t_1) + g^*(t_2)) \leq \mu_f(f^*(t_1)) + \mu_g(f^*(t_2)) \leq t_1 + t_2.$$

Por la definición de reordenamiento decreciente

$$(f+g)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2).$$

□

Ejemplo 3.10. Vamos a calcular la función de distribución y el reordenamiento decreciente de una función simple. Sea $s(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}(x)$ una función simple con $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_k > \alpha_{k+1} = 0$, $A_j = \{x \in X : s(x) = \alpha_j\}$. Entonces,

$$\mu_s(\lambda) = \mu(\{x \in X : |s(x)| > \lambda\}) = \mu(\{x \in X : \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}(x) > \lambda\}) = \sum_{j=1}^k \beta_j \chi_{B_j}(\lambda),$$

donde $\beta_j = \sum_{i=1}^j \mu(A_i)$, y $B_j = [\alpha_{j+1}, \alpha_j)$ para $j = 1, 2, ..., k$. Luego la función de distribución de una función simple es una función simple. El reordenamiento decreciente de s también es una función simple

$$s^*(t) = \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : \mu_s(\lambda) \leq t\} = \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : \sum_{j=1}^k \beta_j \chi_{B_j}(\lambda) \leq t\} = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{[\beta_{j-1}, \beta_j)}(t).$$

Ejemplo 3.11. Sea $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, y $\mu = \#$ la medida contadora. Las funciones medibles $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ son sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Su función de distribución es $\mu_f(\lambda) = \mu(\{n \in \mathbb{N} : |a_n| > \lambda\})$ para $\lambda > 0$. El reordenamiento decreciente es una función definida para todo $t \geq 0$, pero podemos interpretarlo como una sucesión si definimos $a_n^* = f^*(t)$ para $n - 1 \leq t < n$. Por tanto, $a_n^* = \text{ínf}\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq n - 1\} = \text{ínf}\{\lambda : \mu(\{k \in \mathbb{N} : |a_n| > \lambda\}) \leq n - 1\}$. Luego $\{a_n^*\}$ es la sucesión $\{|a_n|\}$ permutada en orden decreciente.

1.1. Reordenamiento decreciente y normas p

En esta sección probaremos que la norma p de una función solo depende su reordenamiento decreciente o de su función de distribución.

Teorema 3.12. *Sean $0 < p < \infty$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces*

$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) = p \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} f^*(t)^p dt \tag{3.5}$$

y

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \mu_f(\lambda)^{\frac{1}{p}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t). \tag{3.6}$$

Además, para $p = \infty$ tenemos

$$\|f\|_{\infty} = f^*(0).$$

Demostración: La primera igualdad de (3.5) es conocida ya que se ha probado en la asignatura *Análisis Real*, su demostración puede encontrarse en [9]. Vamos a usar esta igualdad para probar la segunda igualdad. Aplicando que $|f|^p$ y $(|f|^p)^* = (f^*)^p$ son equimedibles, es decir, que tienen la misma función de distribución, obtenemos

$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) = \int_0^{\infty} \mu_{|f|^p}(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \mu_{(f^*)^p}(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} f^*(t)^p dt.$$

Probemos (3.6) para funciones simples en primer lugar. Sea $s(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{A_j}(x)$ una función simple con $a_1 > a_2 > ... > a_k > a_{k+1} = 0$, y $A_j = \{x \in X : s(x) = a_j\}$. Entonces, como hemos visto en el Ejemplo 3.10, su función de distribución es,

$$\mu_s(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \chi_{[a_{j+1}, a_j)}(\lambda),$$

donde $\beta_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(A_j)$. Y su reordenamiento decreciente es

$$s^*(t) = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{[\beta_{j-1}, \beta_j)}.$$

Por tanto,

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \mu_s(\lambda)^{\frac{1}{p}} = \sup_{1 \leq j \leq k} \beta_j^{\frac{1}{p}} a_j = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} s^*(t).$$

Ahora aplicando el Teorema 3.8 obtenemos (3.6). Para la última igualdad, teniendo en cuenta que la función de distribución es positiva y la definición de la norma infinito,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\infty} &= \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) = 0\} \\ &= \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : \mu_f(\lambda) = 0\} = \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : \mu_f(\lambda) \leq 0\} = f^*(0). \end{aligned}$$

□

1.2. Desigualdad de Hardy-Littlewood

Lema 3.13. *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces, para cada $A \in \mathcal{M}$ tenemos la desigualdad*

$$\int_A |f(x)|\, d\mu(x) \leq \int_0^{\mu(A)} f^*(t)dt.$$

Demostración: Si $\mu(A) = \infty$, entonces

$$\int_A |f(x)|\, d\mu(x) \leq \int_X |f(x)|\, d\mu(x) = \int_0^{\infty} f^*(t)dt.$$

Si $\mu(A) < \infty$, entonces

$$\begin{aligned}\int_A |f(x)|\, d\mu(x) = \int_X |f(x)\chi_A(x)|\, d\mu(x) &= \int_0^{\infty} (f\chi_A)^*(t)dt \\ &\leq \int_0^{\infty} f^*(t)\chi_{[0,\mu(A))}(t)dt = \int_0^{\mu(A)} f^*(t)dt.\end{aligned}$$

□

Teorema 3.14. (Hardy-Littlewood) *Sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones medibles. Entonces*

$$\int_X |f(x)g(x)|\, d\mu(x) \leq \int_0^{\infty} f^*(t)g^*(t)dt. \tag{3.7}$$

Demostración: Vamos a probar el resultado para funciones simples no negativas, el caso general es consecuencia inmediata del teorema de la convergencia monótona y el Teorema 3.8. Sea s una función simple de la forma $s(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{A_j}(x)$, donde $a_1 > a_2 > ... > a_k > a_{k+1} = 0$, y $A_j = \{x \in X : s(x) = a_j\}$. Podemos escribir s como $s(x) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \chi_{B_j}(x)$, donde $B_j = \cup_{i=1}^{j} A_j$ y $\beta_j = a_j - a_{j+1}$. Sean $\gamma_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(A_i)$ y $\gamma_0 = 0$, entonces aplicando el Lema 3.13 obtenemos

$$\begin{aligned}\int_X |s(x)g(x)|\, d\mu(x) = \int_X \left| \left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j \chi_{B_j}(x) \right) g(x) \right| d\mu(x) &= \sum_{j=1}^{k} \beta_j \int_{B_j} |g(x)|\, d\mu(x) \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} \beta_j \int_0^{\mu(B_j)} g^*(t)dt = \sum_{j=1}^{k} (a_j - a_{j+1}) \int_0^{\mu(B_j)} g^*(t)dt \\ &= \sum_{j=1}^{k} a_j \int_{\gamma_{j-1}}^{\gamma_j} g^*(t)dt = \int_0^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{[\gamma_{j-1},\gamma_j)}(t) \right) g^*(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} s^*(t)g^*(t)dt.\end{aligned}$$

□

2. Espacios de Lorentz $L(p,q)$

En esta sección vamos a estudiar los espacios de Lorentz $L(p,q)$, que son una generalización de los espacios $L^p(\mu)$. Nos centraremos especialmente en los espacios $L(p,1)$ y $L(p,\infty)$, que tendrán especial importancia en el siguiente capítulo.

Definición 3.15. Sea $(X,\mathcal{M},\mu)$ espacio de medida σ-finito, y $0<p\leq\infty$, $0<q\leq\infty$. Entonces el **espacio de Lorentz** $L(p,q)$ es el conjunto de todas las clases de funciones medibles f tales que el funcional $\|f\|_{p,q}<\infty$, donde

$$\|f\|_{p,q}=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } 0<p<\infty, 0<q<\infty\\ \sup\limits_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^*(t) & \text{si } 0<p\leq\infty, q=\infty\end{cases}$$

donde f^* es el reordenamiento decreciente de f.

Observación 3.16. Esta definición no incluye el caso $L(\infty,q)$ con $0<q<\infty$, ya que si $f\in L(\infty,q)$, entonces $f=0$ con casi todo punto. Probemos esto por reducción al absurdo, sea $f\in L(\infty,q)$ no nula en casi todo punto, es decir, existen $C>0$ y $A\in\mathcal{M}$ de medida positiva, tales que $|f(x)|>C$ para todo $x\in A$. Entonces

$$\|f\|_{\infty,q}^q=\int_0^\infty f^*(t)^q\frac{dt}{t}\geq\int_0^\infty\left(f\chi_A\right)^*(t)^q\frac{dt}{t}\geq\int_0^{\mu(A)}C^q\frac{dt}{t}=\infty.$$

Lo cual es una contradicción, ya que $f\in L(\infty,q)$. Por tanto $L(\infty,q)$ es trivial.

Observación 3.17. Los espacios de Lorentz $L(p,q)$ pueden verse como una generalización de los espacios $L^p(\mu)$. La razón es que $L(p,p)=L^p(\mu)$, para $0<p\geq\infty$. De hecho, para $0<p<\infty$ la definición del funcional $\|.\|_{p,p}$ nos queda

$$\begin{aligned}\|f\|_{p,p}&=\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_0^\infty f^*(t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\int_X|f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}=\|f\|_p\end{aligned}$$

donde hemos usado el Teorema 3.12. Para $p=\infty$, usando que f^* es decreciente y el mismo teorema que antes tenemos

$$\|f\|_{\infty,\infty}=\sup_{t>0}f^*(t)=f^*(0)=\|f\|_\infty.$$

Por tanto $L(p,p)=L^p(\mu)$ con igualdad de normas.

Nosotros nos centraremos en los dos siguientes espacios:

$$\begin{aligned}L(p,1)=&\{f:X\longrightarrow\mathbb{R}\text{ medible}:\|f\|_{p,1}=\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\frac{dt}{t}<\infty\},\\L(p,\infty)=&\{f:X\longrightarrow\mathbb{R}\text{ medible}:\|f\|_{p,\infty}=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^*(t)<\infty\}.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.18. Calculemos las normas $(p,1)$ y (p,∞) de una función característica. Sea $A\in\mathcal{M}$ de medida finita,

$$\begin{aligned}\|\chi_A\|_{p,1}&=\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}}(\chi_A)^*(t)\frac{dt}{t}=\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-1}\chi_{[0,\mu(A))}dt\\&=\int_0^{\mu(A)}t^{\frac{1}{p}-1}dt=\left[pt^{\frac{1}{p}}\right]_0^{\mu(A)}=p\mu(A)^{\frac{1}{p}},\\\|\chi_A\|_{p,\infty}&=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}(\chi_A)^*(t)=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}\chi_{[0,\mu(A))}(t)=\mu(A)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

En el siguiente resultado veremos que $L(p,q)$ es un espacio vectorial y el funcional $\|.\|_{p,q}$ es una cuasi-norma, es decir, cumple la definición de norma excepto por la desigualdad triangular. Sin embargo esencialmente verifica la desigualdad triangular de la siguiente manera, existe $C \geq 1$ tal que $\|f+g\|_{p,q} \leq C(\|f\|_{p,q} + \|g\|_{p,q})$.

Teorema 3.19. *El espacio de Lorentz $L(p,q)$ es un espacio vectorial y el funcional $\|.\|_{p,q}$ es una cuasi-norma.*

Demostración: Sean $f, g \in L(p,q)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, veamos que $f+g \in L(p,q)$ y $\alpha f \in L(p,q)$. Supongamos en primer lugar $0 < p, q < \infty$, entonces aplicando el Teorema 3.9 y haciendo cambios de variables obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{p,q} &= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}\,(f+g)^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}\left[f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right]\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\int_0^\infty \left((2u)^{\frac{1}{p}}\left[f^*(u) + g^*(u)\right]\right)^q \frac{du}{u}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^\infty 2^q \left(\left[u^{\frac{1}{p}} f^*(u)\right]^q + \left[u^{\frac{1}{p}} g^*(u)\right]^q\right)\frac{du}{u}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= 2^{\frac{1}{p}+1}\left(\|f\|_{p,q}^q + \|g\|_{p,q}^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{p}+1}\left[2\,\text{máx}(\|f\|_{p,q}^q, \|g\|_{p,q}^q)\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+1}\left(\|f\|_{p,q} + \|g\|_{p,q}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto $f+g \in L(p.q)$. Para ver que $\alpha f \in L(p,q)$ basta con utilizar la igualdad $(\alpha f)^*(t) = |\alpha| f^*(t)$ del Teorema 3.6, y obtenemos $\|\alpha f\|_{p,q} = |\alpha|\,\|f\|_{p,q}$. Luego, $\alpha f \in L(p,q)$. Si $f = 0$ en casi todo punto, entonces claramente $\|f\|_{p,q} = 0$. Recíprocamente, supongamos $\|f\|_{p,q} = 0$ entonces $f^*(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, y por tanto $f = 0$ en casi todo punto. Supongamos ahora, $0 < p \leq \infty$ y $q = \infty$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{p,\infty} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(f+g)^*(t) \leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\left(f^*(\frac{t}{2}) + g^*(\frac{t}{2})\right) \\
&= \sup_{u>0}(2u)^{\frac{1}{p}}\left(f^*(u) + g^*(u)\right) \leq 2^{\frac{1}{p}}\left(\|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty}\right).
\end{aligned}$$

Luego $f+g \in L(p,\infty)$. Análogamente se prueba $\|\alpha f\|_{p,\infty} = |\alpha|\,\|f\|_{p,\infty}$. □

El siguiente resultado, que no se demostrará (véase [9]), es más fuerte que el anterior, este teorema dice que en algunos casos de p y q el funcional $\|.\|_{p,q}$ es una norma. Esto depende de la monotonía de la función $t^{\frac{q}{p}-1}$, cuando es decreciente $\|.\|_{p,q}$ es una norma.

Teorema 3.20. *Si $1 \leq q \leq p$ o $p = q = \infty$, entonces el funcional $\|.\|_{p,q}$ es una norma.*

En vista de este teorema podemos afirmar que $\left(L(p,1), \|.\|_{p,1}\right)$ es un espacio normado.

Ejemplo 3.21. Vamos a probar que $\left(L(p,\infty), \|.\|_{p,\infty}\right)$ no es un espacio normado. Consideremos $A, B \in \mathcal{M}$ tales que $A \subset B$, $a = \left(\frac{\mu(B)}{\mu(B)}\right)^{\frac{1}{p}} > 1$, y $\mu(B \setminus A) \leq \mu(A)$. Ahora tomemos

las funciones $f(x) = a\chi_A(x) + \chi_{B\setminus A}(x)$ y $g(x) = \chi_A(x) + a\chi_{B\setminus A}(x)$. Los reordenamientos decrecientes de estas funciones son

$$f^*(t) = a\chi_{[0,\mu(A))}(t) + \chi_{[\mu(A),\mu(B))}(t),$$
$$g^*(t) = a\chi_{[0,\mu(B\setminus A))}(t) + \chi_{[\mu(B\setminus A),\mu(B))}(t).$$

Como consecuencia de estas igualdades obtenemos que $\|f\|_{p,\infty} = \|g\|_{p,\infty} = \mu(B)^{\frac{1}{p}}$. Ahora bien, $f(x) + g(x) = (1+a)\chi_B(x)$, y por tanto $\|f+g\|_{p,\infty} = (1+a)\mu(B)^{\frac{1}{p}}$. Entonces,

$$\|f+g\|_{p,\infty} = (1+a)\mu(B)^{\frac{1}{p}} > 2\mu(B)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty}.$$

Es decir, no se cumple la desigualdad triangular.

Ahora vamos a probar una relación de inclusión entre los espacios de Lorentz.

Teorema 3.22. *Sea $0 < p < \infty$ y $0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$. Entonces existe $C > 0$ que solo depende de p, q_1 y q_2, tal que*

$$\|f\|_{p,q_2} \leq C \|f\|_{p,q_1}, \tag{3.8}$$

y por tanto $L(p,q_1) \subset L(p,q_2)$.

Demostración: Podemos suponer $q_1 < q_2$ ya que en otro caso no hay nada que probar. Vamos a probarlo primero para $q_2 = \infty$, usando que f^* es decreciente tenemos que para cada $t > 0$

$$t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \left(\frac{p}{q_1}\int_0^t \left(s^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{q_1} \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}} \leq \left(\frac{p}{q_1}\int_0^t \left(s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right)^{q_1} \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}} \leq \left(\frac{p}{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}} \|f\|_{p,q_1}.$$

Entonces, tomando supremo para $t > 0$ obtenemos $\|f\|_{p,\infty} \leq \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q_1}} \|f\|_{p,q_1}$. Si $q_2 < \infty$, entonces usando lo anterior tenemos

$$\begin{aligned}\|f\|_{p,q_2} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{r-q_1+q_1} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_2}} \leq \|f\|_{p,\infty}^{1-\frac{q_1}{q_2}} \|f\|_{p,q_1}^{\frac{q_1}{q_2}} \\ &\leq \left[\left(\frac{p}{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}} \|f\|_{p,q_1}\right]^{1-\frac{q_1}{q_2}} \|f\|_{p,q_1}^{\frac{q_1}{q_2}} = \left(\frac{p}{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}} \|f\|_{p,q_1}.\end{aligned}$$

□

En el siguiente resultado se expone una propiedad topológica muy importante de los espacios de Lorentz $L(p,q)$, son completos. La demostración del siguiente resultado puede encontrarse en [9].

Teorema 3.23. *El espacio de Lorentz $L(p,q)$ con la cuasi-norma $\|.\|_{p,q}$ es completo para todo $0 < p < \infty$, $0 \leq q \leq \infty$.*

En particular, $L(p,1)$ es espacio de Banach para $1 < p < \infty$.

Teorema 3.24. *El conjunto de todas las funciones simples medibles e integrables es denso en $L(p,q)$ para $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$.*

Demostración: Sea $f \in L(p,q)$, $f \geq 0$, entonces existe una sucesión de funciones simples $\{s_n\}$ con $0 \leq s_n \uparrow f$. Aplicando el Teorema 3.4 y la Proposición 3.2 (2) obtenemos

$$t^{\frac{q}{p}-1}(f-s_n)^*(t)^q \leq t^{\frac{q}{p}-1}\left(f^*\left(\frac{t}{2}\right)+s_n^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^q \leq 2^q t^{\frac{q}{p}-1} f^*\left(\frac{t}{2}\right)^q.$$

Y esta última función es integrable en $(0,\infty)$ ya que $f \in L(p,q)$. Aplicando el teorema de la convergencia dominada y el Teorema 3.8 obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \|f-s_n\|_{p,q}^q = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}(f-s_n)^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} = 0.$$

□

3. Operadores de tipo débil restringido

En el siguiente capítulo haremos una interpolación para un cierto operador maximal en Teoría Ergódica. Para ello, en esta sección introduciremos algunas definiciones importantes en la teoría de interpolación de operadores, y probaremos un resultado que necesario en el siguiente capítulo.
Sea T un operador definido en un espacio D de funciones medibles en $(X,\mathcal{M},\mu)$ tomando valores que son funciones medibles en otro espacio $(Y,\mathcal{N},\nu)$. Decimos que T es **subaditivo** si

$$|T(f_1+f_2)(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)| \tag{3.9}$$

para casi todo $x \in X$, donde $f_1, f_2 \in D$.

Definición 3.25. Sea $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espacio de medida. Si D contiene todas las funciones simples y todos sus truncamientos, decimos que T es de **tipo débil** (p,q), con $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q < \infty$, si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_p\right)^q. \tag{3.10}$$

para toda $f \in L^p(\mu) \cap D$. Para $q = \infty$ la desigualdad anterior se remplazaría por la condición $\|Tf\|_\infty \leq C\|f\|_p$.

En vista de esta definición de operador de tipo débil, podemos referirnos al espacio $L(q,\infty)$ como débil-$L^q(\mu)$, ya que la desigualdad (3.10) es equivalente a

$$\|Tf\|_{q,\infty} \leq C\|f\|_p.$$

Para probar esta equivalencia basta observemos que, por definición, $\sup_{\lambda>0} \lambda\mu_{Tf}(\lambda)^{\frac{1}{q}} \leq C\|f\|_p$, luego $\lambda\mu_{Tf}(\lambda)^{\frac{1}{q}} \leq C\|f\|_p$ para todo $\lambda > 0$. Esto es equivalente a $\mu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_p\right)^q$. Además, como $\|f\|_p = \|f\|_{p,p}$ y $p \geq 1$, entonces por el Teorema 3.22 tenemos $\|f\|_p \leq C\|f\|_{p,1}$. Por lo tanto un operador T de tipo débil (p,q) satisface la desigualdad

$$\|Tf\|_{q,\infty} \leq C\|f\|_{p,1} \tag{3.11}$$

para toda $f \in L(p,1) \cap D$. Luego, que un operador T satisfaga (3.11) es más débil que el operador sea de tipo débil (p,q), esto da sentido a la siguiente definición.

Definición 3.26. Sea $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espacio de medida. Si D contiene todas las funciones simples y todos sus truncamientos, decimos que T es de **tipo débil restringido** (p,q), con $1\leq p<\infty$ y $1\leq q\leq\infty$, si existe una constante $C>0$ tal que

$$\|Tf\|_{q,\infty}\leq C\|f\|_{p,1} \tag{3.12}$$

para toda $f\in L(p,1)\cap D$

En el siguiente resultado veremos que para probar que un operador subaditivo T es de tipo débil restringido (p,q), esencialmente, basta con probar que se verifica la desigualdad (3.12) para funciones características de conjuntos de medida finita.

Teorema 3.27. *Sea T un operador subaditivo que lleva funciones simples en un espacio vectorial B con una norma que preserva el orden $\|.\|$. Supongamos que existe $C>0$ tal que*

$$\|T\chi_E\|\leq C\|\chi_E\|_{p,1},$$

para todo $E\in\mathcal{M}$ de medida finita. Entonces existe una constante $A>0$ tal que

$$\|Tf\|\leq C\|f\|_{p,1},$$

para toda función simple f no negativa en el dominio de T.

Demostración: Sea $f\geq 0$ una función simple, perteneciente al dominio de T. Podemos expresar f de la siguiente manera, $f=\sum_{j=1}^{N}c_j\chi_{E_j}$, con $c_1>c_2>...>c_N>c_{N+1}=0$ y $\{E_j\}_{j=1}^{N}$ disjuntos dos a dos. Definimos $f_k=b_k\chi_{F_k}$, donde $b_k=c_k-c_{k+1}$ y $F_k=\bigcup_{j=1}^{k}E_j$. Entonces tenemos $f=\sum_{k=1}^{N}f_k$ y por el Ejemplo 3.10 tenemos $f^*=\sum_{k=1}^{N}f_k^*$. Entonces,

$$\|Tf\|=\left\|T\left(\sum_{k=1}^{N}f_k\right)\right\|\leq\sum_{k=1}^{N}\|Tf_k\|\leq\sum_{k=1}^{N}Cb_k\|\chi_{F_k}\|_{p,1}=C\sum_{k=1}^{N}b_k\|\chi_{F_k}\|_{p,1}.$$

Veamos que está última suma es igual a $C\|f\|_{p,1}$,

$$\begin{aligned}\|f\|_{p,1}&=\left\|\sum_{k=1}^{N}f_k\right\|_{p,1}=\left\|\sum_{k=1}^{N}b_k\chi_{F_k}\right\|_{p,1}=\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{N}f_k\right)^*(t)\frac{dt}{t}\\&=\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{N}f_k^*(t)\right)\frac{dt}{t}=\sum_{k=1}^{N}\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}}f_k^*(t)\frac{dt}{t}=\sum_{k=1}^{N}\|f_k\|_{p,1}\\&=\sum_{k=1}^{N}\|b_k\chi_{F_k}\|_{p,1}=\sum_{k=1}^{N}b_k\|\chi_{F_k}\|_{p,1}.\end{aligned}$$

Por tanto, $\|Tf\|\leq C\|f\|_{p,1}$ para funciones simples no negativas del dominio de T. □

Capítulo 4

Convergencia de medias Cesàro α ergódicas

Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida σ-finito y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Entonces si definimos el operador $T : L^p(\mu) \longrightarrow L^p(\mu)$, $T(f)(x) = f(\tau(x))$, como vimos en el Capítulo 1, T es una isometría, es decir, verifica

$$\|T(f)\|_p = \|f\|_p .$$

Este capítulo tiene como objetivo el estudio de la convergencia (C, α) de las sucesión $\{f(\tau^k(x))\}_{k=0}^{\infty}$ para casi todo $x \in X$. Es decir, queremos estudiar la convergencia en casi todo punto de las **medias de Cesàro de orden** α, $0 < \alpha \leq 1$, definidas para cada función medible f como

$$R_n^\alpha f(x) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} T^k(f)(x) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} f(\tau^k(x)), \tag{4.1}$$

donde $A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{n!}$ y $A_0^\alpha = 1$.
En este capítulo veremos que la convergencia en casi todo punto de $R_n^\alpha f$ se dará para toda $f \in L(\frac{1}{\alpha}, 1)$. La clave para estudiar la convergencia puntual de las medias de Cesàro será estudiar su correspondiente función maximal

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) = \sup_n R_n^\alpha |f|(x). \tag{4.2}$$

Primero estudiamos algunas propiedades del operador maximal ergódico $\mathcal{M}_\alpha$. Seguidamente probaremos la convergencia en casi todo punto de $R_n^\alpha f$ para toda $f \in L^p(\mu)$ con $p > \frac{1}{\alpha}$, que es denso en $L(\frac{1}{\alpha}, 1)$; para ello nos hará falta una descomposición de $L^p(\mu)$. Seguidamente se prueba la convergencia en casi todo punto de $R_n^\alpha f$ para toda $f \in L(\frac{1}{\alpha}, 1)$. Por último se estudia la convergencia en norma y en medida de las medias R_n^α. El capítulo finaliza observando que $L(\frac{1}{\alpha}, 1)$ es el mayor espacio, en cierto sentido, para el que se tiene la convergencia en casi todo punto de $R_n^\alpha f$. En este capítulo se seguirá el artículo de *Broise, Déniel y Derriennic* [2] y la tesis de *Sarrión* [12]

Observemos que $R_n^1 = A_n$ y $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$, es decir, el caso $\alpha = 1$ es el estudiado en el Capítulo 1. A lo largo de este capítulo C representará una constante positiva, no necesariamente la misma cada vez que aparezca.

1. Función maximal ergódica

En esta sección vamos a probar que el operador $\mathcal{M}_\alpha$ es de tipo débil restringido $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})$ y de tipo fuerte (∞, ∞). Mediante una interpolación podremos probar que $\mathcal{M}_\alpha$ es de tipo fuerte (p, p) para todo $\frac{1}{\alpha} < p < \infty$.

Es inmediato ver que este operador maximal es de tipo fuerte (∞, ∞). Sea $f \in L^\infty(\mu)$, entonces para casi todo $x \in X$ tenemos

$$R_n^\alpha |f|(x) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} |f(\tau^k(x))| \leq \|f\|_\infty \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} = \|f\|_\infty .$$

Por tanto, tomando supremo en n obtenemos $\mathcal{M}_\alpha f(x) \leq \|f\|_\infty$ en casi todo $x \in X$. Tenemos entonces,

$$\|\mathcal{M}_\alpha f\|_\infty \leq \|f\|_\infty . \tag{4.3}$$

En el siguiente resultado probaremos que el operador maximal ergódico es de tipo débil restringido (p, p) para $p \geq \frac{1}{\alpha}$.

Teorema 4.1. *Sean $0 < \alpha < 1$ y τ una transformación que conserva la medida. Entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\|\mathcal{M}_\alpha f\|_{p,\infty} \leq C \|f\|_{p,1} , \tag{4.4}$$

para toda $f \in L(p, 1)$ con $\frac{1}{\alpha} \leq p < \infty$.

Demostración: Vamos a probarlo en primer lugar para funciones características. Sea E medible con $\mu(E) < \infty$, consideremos $f = \chi_E$. Supongamos en primer lugar que $p > \frac{1}{\alpha}$. Aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes conjugados p y p', tenemos

$$\begin{aligned} R_n^\alpha \chi_E(x) =& \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} \chi_E(\tau^k(x)) \\ \leq& \frac{1}{A_n^\alpha} \left(\sum_{k=0}^{n} (A_{n-k}^{\alpha-1})^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=0}^{n} \chi_E(\tau^k(x)) \right)^{\frac{1}{p}} . \end{aligned}$$

Estimemos el primer término,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (A_{n-k}^{\alpha-1})^{p'} =& \sum_{k=0}^{n} (A_k^{\alpha-1})^{p'} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (A_k^{\alpha-1})^{p'} \\ \leq& 1 + C \sum_{k=1}^{n} k^{(\alpha-1)p'} \leq 1 + C \int_0^n x^{(\alpha-1)p'} dx \\ =& 1 + \frac{C}{(\alpha-1)p' + 1} \left[n^{(\alpha-1)p'+1} - 0 \right] \\ \leq& C n^{(\alpha-1)p'+1} \end{aligned}$$

En la última desigualdad hemos usado que $p > \frac{1}{\alpha}$, y por tanto $(\alpha - 1)p' + 1 > 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} R_n^\alpha \chi_E(x) \leq& \frac{C}{A_n^\alpha} n^{\frac{(\alpha-1)p'+1}{p'}} \left(\sum_{k=0}^{n} \chi_E(\tau^k(x)) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{n^\alpha} n^{\alpha-1+\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=0}^{n} \chi_E(\tau^k(x)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ =& \frac{C}{n^{\frac{1}{p}}} \left(\sum_{k=0}^{n} \chi_E(\tau^k(x)) \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \chi_E(\tau^k(x)) \right)^{\frac{1}{p}} . \end{aligned}$$

Luego, $R_n^\alpha \chi_E(x) \leq C(\mathcal{M}_1\chi_E(x))^{\frac{1}{p}}$, y tomando supremo en n obtenemos la siguiente relación entre las funciones maximales $\mathcal{M}_\alpha\chi_E(x) \leq C(\mathcal{M}_1\chi_E(x))^{\frac{1}{p}}$. Entonces, usando la desigualdad débil de tipo $(1,1)$ (Teorema 1.5) para el operador maximal ergódico $\mathcal{M}_1$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{M}_\alpha\chi_E\|_{p,\infty} &= \sup_{t>0} t(\mu(\{x \in X : \mathcal{M}_\alpha\chi_E(x) > t\}))^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{t>0} t(\mu(\{x \in X : (\mathcal{M}_1\chi_E(x))^{\frac{1}{p}} > t\}))^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{t>0} t(\mu(\{x \in X : \mathcal{M}_1\chi_E(x) > t^p\}))^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{t>0} t(\frac{C}{t^p}\|\chi_E\|_1)^{\frac{1}{p}} = C\mu(E)^{\frac{1}{p}} = C\|\chi_E\|_{p,1}.
\end{aligned}$$

Hemos probado entonces $\|\mathcal{M}_\alpha\chi_E\|_{p,\infty} \leq C\|\chi_E\|_{p,1}$, para $p > \frac{1}{\alpha}$.

Observemos que esta misma demostración no funciona para el caso $p = \frac{1}{\alpha}$, ya que hemos necesitado que $(\alpha-1)p'+1 > 0$. Sean $p = \frac{1}{\alpha}$ y $x \in X$ fijo. Vamos a utilizar la desigualdad de Hardy-Littlewood con $f(k) = A_{n-k}^{\alpha-1}$ y $g(k) = \chi_E(\tau^k(x))$. La reordenada de una sucesión $\{a_n\}$ es permutar la sucesión $\{|a_n|\}$ de forma decreciente, como vimos en el Ejemplo 3.11. Por tanto como $-1 < \alpha - 1 \leq 0$, entonces $\{A_k^{\alpha-1}\}_{k=1}^\infty$ es decreciente, y es igual a f^*.

$$\begin{aligned}
R_n^\alpha\chi_E(x) =& \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1}\chi_E(\tau^k(x)) \leq \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^n f^*(k)g^*(k) \\
=& \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^n A_k^{\alpha-1}g^*(k) \leq \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{l_x} A_k^{\alpha-1} \\
\leq& C\frac{l_x^\alpha}{A_n^\alpha} \leq C\left(\frac{l_x}{n+1}\right)^\alpha \\
=& C\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n \chi_E(\tau^k(x))\right)^\alpha \leq (\mathcal{M}_1\chi_E(x))^\alpha
\end{aligned}$$

donde $l_x = \#(\{k \in \{1,...,n\} : \chi_E(\tau^k(x)) = 1\}) - 1$. Por tanto, tomando supremo tenemos

$$\mathcal{M}_\alpha\chi_E(x) \leq C(\mathcal{M}_1\chi_E(x))^\alpha = C(\mathcal{M}_1\chi_E(x))^{\frac{1}{p}}.$$

Análogamente al caso anterior obtenemos que $\|\mathcal{M}_\alpha\chi_E\|_{\frac{1}{\alpha},\infty} \leq C\|\chi_E\|_{\frac{1}{\alpha},1}$.

Una vez probado para funciones características, del Teorema 3.27 se obtiene que

$$\|\mathcal{M}_\alpha s\|_{p,\infty} \leq C\|s\|_{p,1}$$

para toda función simple s, con $p > \frac{1}{\alpha}$.

Sea $f \in L(p,1)$, con $f \geq 0$, entonces por el Teorema 3.24 existe una sucesión de funciones simples $\{s_k\}$ tales que $0 \leq s_k \uparrow f$. Tenemos,

$$\begin{aligned}
R_n^\alpha f(x) =& \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1}f(\tau^k(x)) = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1}\lim_{j\to\infty} s_j(\tau^k(x)) \\
=& \lim_{j\to\infty}\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1}s_j(\tau^k(x)) \leq \lim_{j\to\infty}\mathcal{M}_\alpha s_j(x).
\end{aligned}$$

Tomando supremo en n, obtenemos $\mathcal{M}_\alpha f(x) \leq \lim_{j\to\infty} \mathcal{M}_\alpha s_j(x)$. Además, como $s_j(x) \leq f(x)$ para todo j, tenemos $\mathcal{M}_\alpha s_j(x) \leq \mathcal{M}_\alpha f(x)$, para cada j. Por tanto, obtenemos la igualdad

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{M}_\alpha s_j(x)$$

Ahora, aplicando el Teorema 3.8 y el Teorema de la convergencia monótona, podemos concluir

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}_\alpha f\|_{p,\infty} &= \left\|\mathcal{M}_\alpha(\lim_{j\to\infty} s_j)\right\|_{p,\infty} = \left\|\lim_{j\to\infty} \mathcal{M}_\alpha s_j\right\|_{p,\infty} \\ &= \lim_{j\to\infty} \|\mathcal{M}_\alpha s_j\|_{p,\infty} \leq \lim_{j\to\infty} C\,\|s_j\|_{p,1} \\ &= C\left\|\lim_{j\to\infty} s_j\right\|_{p,1} = C\,\|f\|_{p,1}\,.\end{aligned}$$

En el caso general basta aplicar lo anterior a f^+ y f^-. □

Ahora tenemos que $\mathcal{M}_\alpha$ es de tipo fuerte (∞,∞) y de tipo débil restringido $(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha})$, entonces mediante una interpolación (caso particular del Teorema de Marcinkiewicz, véase [1]) vamos a obtener que es de tipo fuerte (p,p) para $\frac{1}{\alpha} < p < \infty$.

Teorema 4.2. *Sean τ una transformación que conserva la medida, $0 < \alpha \leq 1$. Entonces para $p > \frac{1}{\alpha}$ tenemos*

$$\|\mathcal{M}_\alpha f\|_p \leq C_{\alpha,p}\,\|f\|_p \tag{4.5}$$

para toda $f \in L^p(\mu)$. Es decir, $\mathcal{M}_\alpha$ es de tipo fuerte (p,p) para $p > \frac{1}{\alpha}$.

En primer lugar vamos a dar una demostración clásica de este resultado, adaptada al operador maximal ergódico $\mathcal{M}_\alpha$, para la cual vamos a necesitar la desigualdad de Hardy, que probaremos en el siguiente Lema.

Lema 4.3. *Sea h una función positiva y decreciente en $(0,\infty)$, $q \geq 1$ y $r > 0$. Entonces*

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t h(u)du\right)^q t^{-r-1}dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{q}{r}\right)\left(\int_0^\infty (uh(u))^q\, u^{-r-1}du\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.6}$$

Demostración: Vamos a aplicar la desigualdad de Jensen, con $\varphi(t) = |t|^q$ que es convexa en $\mathbb{R}$. Y considerando la medida $d\mu(u) = u^{\frac{r}{q}-1}du$, con la cual, la medida del intervalo $(0,t)$ es $\left(\frac{q}{r}\right)t^{\frac{r}{q}}$. Obtenemos así,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^t h(u)du\right)^q &= \left(\int_0^t h(u)u^{1-\frac{r}{q}}u^{\frac{r}{q}-1}du\right)^q \\ &\leq \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1} t^{r-\frac{r}{q}}\int_0^t h(u)^q u^{q-r-1+\frac{r}{q}}du.\end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando esta estimación y el Teorema de Tonelli, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\int_0^t h(u)du\right)^q t^{-r-1}dt &\leq \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1}\int_0^\infty t^{-1-\frac{r}{q}}\left(\int_0^t h(u)^q u^{q-r-1+\frac{r}{q}}du\right)dt\\ &= \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1}\int_0^\infty (uh(u))^q\, u^{-r-1+\frac{r}{q}}\left(\int_u^\infty t^{-1-\frac{r}{q}}dt\right)du\\ &= \left(\frac{q}{r}\right)^{q}\int_0^\infty (uh(u))^q\, u^{-r-1}du.\end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 4.2: En esta demostración vamos a adaptar la prueba del Teorema de Marcinkiewicz en espacios de Lorentz de *Richard Hunt* [8] a nuestro caso en Teoría Ergódica. Sea $p > \frac{1}{\alpha}$ y $f \in L^p(\mu)$. Entonces por lo probado anteriormente tenemos

$$\|\mathcal{M}_\alpha f\|_{\frac{1}{\alpha},\infty} \leq C\,\|f\|_{\frac{1}{\alpha},1} \tag{4.7}$$

$$\|\mathcal{M}_\alpha f\|_\infty \leq \|f\|_\infty . \tag{4.8}$$

Observemos que (4.7) es equivalente a

$$t^\alpha\,(\mathcal{M}_\alpha f)^*(t) \leq C\,\|f\|_{\frac{1}{\alpha},1} \tag{4.9}$$

para todo $t > 0$. Para cada $t > 0$, consideremos las funciones

$$f^t(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > f^*(t) \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq f^*(t)\end{cases},$$

$$f_t(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq f^*(t) \\ 0 & \text{si } |f(x)| > f^*(t)\end{cases}.$$

Podemos escribir $f(x) = f^t(x) + f_t(x)$. Además, aplicando la Proposición 3.6 (4) y (6), obtenemos

$$\left(f^t\right)^*(s) \leq \begin{cases} f^*(s) & \text{si } 0 < s < t \\ 0 & \text{si } s \geq t\end{cases}, \tag{4.10}$$

$$(f_t)^*(s) \leq \begin{cases} f^*(t) & \text{si } 0 < s < t \\ f^*(s) & \text{si } s \geq t\end{cases}. \tag{4.11}$$

Como $\mathcal{M}_\alpha$ es subaditivo, entonces para casi todo $x \in X$ tenemos

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) = \mathcal{M}_\alpha(f^t + f_t)(x) \leq \mathcal{M}_\alpha f^t(x) + \mathcal{M}_\alpha f_t(x).$$

Entonces aplicando el Corolario 3.5 (2) y el Teorema 3.9 obtenemos,

$$(\mathcal{M}_\alpha f)^*(2s) \leq \left(\mathcal{M}_\alpha f^t + \mathcal{M}_\alpha f_t\right)^*(2s) \leq \left(\mathcal{M}_\alpha f^t\right)^*(s) + (\mathcal{M}_\alpha f_t)^*(s) \tag{4.12}$$

para cada $s > 0$. Ahora utilizando (4.12) y (4.9) obtenemos

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}_\alpha f)^*(2s) &\leq \left(\mathcal{M}_\alpha f^t\right)^*(s) + (\mathcal{M}_\alpha f_t)^*(s)\\ &= t^{-\alpha}\left[t^\alpha\left(\mathcal{M}_\alpha f^t\right)^*(s)\right] + (\mathcal{M}_\alpha f_t)^*(s)\\ &\leq t^{-\alpha}C\left\|f^t\right\|_{\frac{1}{\alpha},1} + (\mathcal{M}_\alpha f_t)^*(0)\\ &= Ct^{-\alpha}\left\|f^t\right\|_{\frac{1}{\alpha},1} + \|\mathcal{M}_\alpha f_t\|_\infty\end{aligned}$$

para cada $s > 0$. Entonces aplicando el Teorema 3.12 y la desigualdad triangular de Minkowski

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}_\alpha f\|_p =& \left(\int_0^\infty (\mathcal{M}_\alpha f)^*(t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty (\mathcal{M}_\alpha f)^*(2t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\ \leq& 2^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty \left(Ct^{-\alpha}\left\|f^t\right\|_{\frac{1}{\alpha},1} + \|\mathcal{M}_\alpha f_t\|_\infty\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\ \leq& 2^{\frac{1}{p}}C\left(\int_0^\infty t^{-\alpha p}\left\|f^t\right\|_{\frac{1}{\alpha},1}^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + 2^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty \|\mathcal{M}_\alpha f_t\|_\infty^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Estudiemos cada sumando por separado, para estimar el primer sumando vamos a usar (4.10) y la desigualdad de Hardy (Lema 4.3)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{-\alpha p}\left\|f^t\right\|_{\frac{1}{\alpha},1}^p dt &= \int_0^\infty t^{-\alpha p}\left(\int_0^\infty s^{\alpha-1}\left(f^t\right)^*(s)ds\right)^p dt\\ &\leq \int_0^\infty t^{-\alpha p}\left(\int_0^t s^{\alpha-1}f^*(s)ds\right)^p dt\\ &\leq \left(\frac{p}{\alpha p-1}\right)^p \int_0^\infty \left(s^\alpha f^*(s)\right)^p s^{-\alpha p}ds\\ &= \left(\frac{p}{\alpha p-1}\right)^p \int_0^\infty f^*(s)^p ds.\end{aligned}$$

Para estimar el segundo sumando, usamos (4.8) y (4.11) obtenemos

$$\|\mathcal{M}_\alpha f_t\|_\infty \leq \|f_t\|_\infty \leq f^*(t).$$

Por tanto,

$$\int_0^\infty \|\mathcal{M}_\alpha f_t\|_\infty^p dt \leq \int_0^\infty f^*(t)^p dt.$$

Juntando estas dos estimaciones y usando (3.5) obtenemos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}_\alpha f\|_p \leq& 2^{\frac{1}{p}}C\left(\int_0^\infty t^{-\alpha p}\left\|f^t\right\|_{\frac{1}{\alpha},1}^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + 2^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty \|\mathcal{M}_\alpha f_t\|_\infty^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\ \leq& 2^{\frac{1}{p}}\left[C\left(\frac{p}{\alpha p-1}\right)+1\right]\left(\int_0^\infty f^*(t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = C_{\alpha,p}\|f\|_p.\end{aligned}$$

□

Vamos a dar otra demostración más "sencilla" del Teorema 4.2, para ello seguiremos la prueba de *Terence Tao* del Teorema de interpolacion de Marcinkiewicz (veáse [16]). Esta prueba se basa en la discretización de (3.5), es decir, si $f \in L^p(\mu)$, entonces

$$\|f\|_p^p \simeq \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np}\mu_f(2^n). \tag{4.13}$$

Esto significa que existen dos constantes $A_1, A_2 > 0$ tales que

$$A_1\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np}\mu_f(2^n) \leq \|f\|_p^p \leq A_2\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np}\mu_f(2^n).$$

Demostración del Teorema 4.2: Sea f simple medible, consideremos la siguiente descomposición, $f_m = f\chi_{F_m}$ donde $F_m = \{x \in X : 2^m < |f(x)| \leq 2^m + 1\}$ para cada $m \in \mathbb{Z}$. Entonces $f = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_m$. Como $f = \sum_{k=1}^{n} a_k\chi_{A_k}$, entonces existen $m_1, ..., m_n \in \mathbb{Z}$ tales que para cada $j \in \{1, ..., n\}$ se verifica $2^{m_j} < |a_j| \leq 2^{m_j+1}$. Es decir, si $m \notin \{m_1, ..., m_n\}$ entonces $f_m \equiv 0$. Hemos probado que como f es simple, entonces $f_m = 0$ salvo para un número finito de m.
Sea $k > 1$, consideremos $\beta = \frac{1-\alpha p}{k} < 0$. Definimos los coeficientes $\widetilde{C}_{n,m} = 2^{\beta|n-m|}$, que verifican

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{C}_{n,m} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widetilde{C}_{n,m} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{\beta|n-m|} \leq 2\sum_{j=0}^{\infty} 2^{\beta j} < \infty$$

Sean $\varepsilon = \left(2\sum_{j=0}^{\infty} 2^{\beta j}\right)^{-1}$ y $C_{n,m} = \varepsilon\widetilde{C}_{n,m}$. Entonces, estos nuevos coeficientes verifican

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_{n,m} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} C_{n,m} \leq 1. \tag{4.14}$$

En vista de (4.13) sabemos que existe una constante $A > 0$ tal que

$$\|\mathcal{M}_\alpha f\|_p^p \leq A\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np}\mu(\{x \in X : \mathcal{M}_\alpha f(x) > 2^n\}).$$

Sea $E_n = \{x \in X : \mathcal{M}_\alpha f(x) > 2^n\}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Si $x \in E_n$,

$$2^n < \mathcal{M}_\alpha f(x) \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}_\alpha f_m(x).$$

Por otra parte, aplicando (4.14) tenemos $\sum_{m\in\mathbb{Z}} C_{n,m} \leq 2^n$, juntando ambas desigualdades

$$2^n \sum_{m\in\mathbb{Z}} C_{n,m} < \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}_\alpha f_m(x).$$

Por tanto, para algún $m \in \mathbb{Z}$ se tiene $\mathcal{M}_\alpha f_m(x) > 2^n C_{n,m}$, lo que prueba la inclusión

$$\{x \in X : \mathcal{M}_\alpha f(x) > 2^n\} \subset \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \{x \in X : \mathcal{M}_\alpha f_m(x) > 2^n C_{n,m}\}.$$

Aplicando la subaditividad de μ obtenemos

$$\mu(\{x \in X : \mathcal{M}_\alpha f(x) > 2^n\}) \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mu(\{x \in X : \mathcal{M}_\alpha f_m(x) > 2^n C_{n,m}\}). \tag{4.15}$$

Como $|f_m(x)| \leq 2^{m+1}$ para todo $x \in X$, entonces aplicando (4.3) obtenemos la acotación de su maximal,

$$\|\mathcal{M}_\alpha f_m\|_\infty \leq \|f_m\|_\infty \leq 2^{m+1},$$

y por tanto $\mathcal{M}_\alpha f_m(x) \leq 2^{m+1}$ en casi todo $x \in X$.
Supongamos que $\mu(\{x \in X : \mathcal{M}_\alpha f_m(x) > 2^n C_{n,m}\}) > 0$, entonces existe algún $x \in X$ tal que $\mathcal{M}_\alpha f_m(x) > 2^m C_{n,m}$ y $\mathcal{M}_\alpha f_m(x) \leq 2^{m+1}$. De estas dos desigualdades podemos concluir, $2^n C_{n,m} \leq 2^{m+1}$, entonces $C_{n,m} \leq 2(2^{m-n})$. Es decir, la suma de (4.15) se puede restringir a los m en el conjunto $I_n = \{m \in \mathbb{Z} : C_{n,m} \leq 2(2^{m-n})\}$,

$$\mu(\{x \in X : \mathcal{M}_\alpha f(x) > 2^n\}) \leq \sum_{m\in I_n} \mu(\{x \in X : \mathcal{M}_\alpha f_m(x) > 2^n C_{n,m}\}). \tag{4.16}$$

Además, usando la desigualdad de tipo débil restringido $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in X : \mathcal{M}_\alpha f_m(x) > 2^n C_{n,m}\}) \leq & \frac{C}{(2^n C_{n,m})^{\frac{1}{\alpha}}} \|f_m\|^{\frac{1}{\alpha}}_{\frac{1}{\alpha},1} \\ \leq & \frac{C}{(2^n C_{n,m})^{\frac{1}{\alpha}}} 2^{(m+1)\frac{1}{\alpha}} \mu(F_m) \\ \leq & 2^{\frac{1}{\alpha}} C \left(\frac{2^m}{2^n C_{n,m}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \mu(F_m).\end{aligned}$$

Entonces, juntando estas estimaciones y aplicando el Teorema de Fubini para series obtenemos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}_\alpha f\|_p^p \leq & A \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} \mu(E_n) \\ \leq & A \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} \sum_{m\in I_n} \mu(\{x \in X : \mathcal{M}_\alpha f_m(x) > 2^n C_{n,m}\}) \\ \leq & A \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} \sum_{m\in I_n} 2^{\frac{1}{\alpha}} C \left(\frac{2^m}{2^n C_{n,m}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \mu(F_m) \\ = & \widetilde{A} \sum_{m\in\mathbb{Z}} 2^{mp} \mu(F_m) \left(\sum_{n\in A_m} \frac{2^{(m-n)\frac{1}{\alpha}}}{(C_{n,m})^{\frac{1}{\alpha}}} 2^{(n-m)p}\right),\end{aligned}$$

donde $A_m = \{n \in \mathbb{Z} : C_{n,m} \leq 2(2^{m-n})\}$. Vamos a probar que la suma interior está acotada por una constante que no depende de m. Observemos que en vista de la definición de los coeficientes $C_{n,m}$ tenemos

$$\sum_{n\in A_m} \frac{2^{(m-n)\frac{1}{\alpha}}}{(C_{n,m})^{\frac{1}{\alpha}}} 2^{(n-m)p} = \sum_{n\in A_m} \frac{2^{(m-n)(\frac{1}{\alpha}-p)}}{(\varepsilon 2^{\beta|n-m|})^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{n\in A_m} \frac{2^{(m-n)(\frac{1}{\alpha}-p)}}{2^{|n-m|(\frac{1}{\alpha}-p)\frac{1}{k}}}.$$

Supongamos en primer lugar que $n - m \geq 0$, es decir, $m \leq n$. En este caso,

$$\sum_{n\in A_m} \frac{2^{(m-n)(\frac{1}{\alpha}-p)}}{2^{|n-m|(\frac{1}{\alpha}-p)\frac{1}{k}}} = \sum_{n\in A_m} \frac{2^{(m-n)(\frac{1}{\alpha}-p)}}{2^{(n-m)(\frac{1}{\alpha}-p)\frac{1}{k}}} = \sum_{n\in A_m} 2^{(m-n)(1+\frac{1}{k})(\frac{1}{\alpha}-p)}.$$

Sea $n \in A_m$ tal que $n \geq m$, esto es, $C_{n,m} = \varepsilon 2^{\beta(n-m)} < 2(2^{m-n})$ y por tanto, $2^{\frac{1}{k}(1-\alpha p)(n-m)} \leq \frac{2}{\varepsilon} 2^{m-n}$. Obtenemos entonces la acotación, $2^{(n-m)\left[\frac{1-\alpha p}{k}+1\right]} \leq \frac{2}{\varepsilon}$. Sea $\gamma = \frac{1-\alpha p}{k}+1$, y tomemos k suficientemente grande para que $\gamma > 0$. Luego, $2^{\gamma(n-m)} \leq \frac{2}{\varepsilon}$, y por tanto existe L fijo, tal que $(n-m) \leq L$, es decir, $n \leq m + L$. Así que,

$$\begin{aligned}\sum_{n\in I_n} 2^{(m-n)(1+\frac{1}{k})(\frac{1}{\alpha}-p)} \leq & \sum_{n=m}^{m+L} 2^{(m-n)(1+\frac{1}{k})(\frac{1}{\alpha}-p)} = \sum_{j=0}^{L} 2^{-j(1+\frac{1}{k})(\frac{1}{\alpha}-p)} \\ = & \sum_{j=0}^{L} 2^{j(1+\frac{1}{k})(p-\frac{1}{\alpha})} = K < \infty,\end{aligned}$$

con K_1 una constante independiente de m.

Supongamos ahora que $n \leq m$, entonces

$$\sum_{n\in A_m} \frac{2^{(m-n)(\frac{1}{\alpha}-p)}}{2^{|n-m|(\frac{1}{\alpha}-p)\frac{1}{k}}} = \sum_{n\in A_m} 2^{(m-n)(1-\frac{1}{k})(\frac{1}{\alpha}-p)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(1-\frac{1}{k})(\frac{1}{\alpha}-p)}$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{(1-\frac{1}{k})(\frac{1}{\alpha}-p)}\right)^j = K_2 < \infty,$$

donde la última serie es convergente porque es una serie geométrica y como $p > \frac{1}{\alpha}$ entonces $2^{(1-\frac{1}{k})(\frac{1}{\alpha}-p)} < 1$, y por tanto K_2 es una constante independiente de m. Usando de nuevo (4.13), podemos concluir,

$$\|\mathcal{M}_\alpha f\|_p^p \leq \widetilde{A}\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}(K_1+K_2)\sum_{m\in\mathbb{Z}} 2^{mp}\mu(F_m)$$
$$= \widetilde{A}\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}(K_1+K_2)\sum_{m\in\mathbb{Z}} 2^{mp}\mu_f(2^m)$$
$$\leq B\,\|f\|_p^p.$$

Hemos probado que existe $B > 0$ tal que para toda $f \in L^p(\mu)$ simple con $p > \frac{1}{\alpha}$ se tiene $\|\mathcal{M}_\alpha f\|_p^p \leq B\,\|f\|_p^p$. Si $f \geq 0$ en $L^p(\mu)$, entonces existe una sucesión de funciones simples $\{s_k\}$ tales que $0 \leq s_k \uparrow f$, y podemos concluir

$$\|\mathcal{M}_\alpha f\|_p = \left\|\mathcal{M}_\alpha(\lim_{k\to\infty} s_k)\right\|_p = \left\|\lim_{k\to\infty} \mathcal{M}_\alpha s_k\right\|_p$$
$$= \lim_{k\to\infty} \|\mathcal{M}_\alpha s_k\|_p \leq B \lim_{k\to\infty} \|s_k\|_p$$
$$= B\left\|\lim_{k\to\infty} s_k\right\|_p = B\,\|f\|_p.$$

□

2. Convergencia en casi todo punto

2.1. Descomposición de $L^p(\mu)$

Sea τ una transformación que conserva la medida, y $T : L^p(\mu) \longrightarrow L^p(\mu)$, $T(f)(x) = f(\tau(x))$. Definimos los siguientes conjuntos

$$A = \{f \in L^p(\mu)/T(f) = f\},\ B = \{f - T(f)/f \in L^p(\mu) \text{ simple }\}.$$

La siguiente descomposición será necesaria a la hora de probar la convergencia en casi todo punto de $R_n^\alpha f$ para cada $f \in L^p(\mu)$ con $p > \frac{1}{\alpha}$.

Proposición 4.4. *$L^p(\mu) = \overline{A \bigoplus B}$, es decir, $A \bigoplus B$ es denso en $L^p(\mu)$.*

Demostración: Veamos en primer lugar que $A \cap B = \{0\}$. Sea $g \in A \cap B$, como $g \in A$, entonces tenemos $A_n g = g$ para todo n, y por tanto $A_n g \longrightarrow g$ en todo punto. Por otra parte, como $g \in B$, entonces $g = f - Tf$ para una cierta función simple $f \in L^p(\mu)$. Por tanto,

$$A_n g = A_n(f - Tf) = \tfrac{1}{n+1} f - \tfrac{1}{n+1} T^{n+1} f.$$

El primer sumando tiende a 0 en casi todo punto. Estudiemos el segundo sumando, veamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{T^n f}{n} = 0$ en casi todo punto. Para ello veamos que la siguiente integral es finita:

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{T^k f}{k} \right|^p d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \int_X \left| T^k f \right|^p d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \left\| T^k f \right\|_p^p$$
$$= \|f\|_p^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} < \infty,$$

pues $f \in L^p(\mu)$ y $p > 1$. Luego, la suma es finita en casi todo punto, y por tanto el termino general tiende a cero. Hemos probado así $\lim_{n\to\infty} \frac{T^n f}{n} = 0$. Tenemos entonces, $A_n g \longrightarrow 0$ y $A_n g \longrightarrow g$ en casi todo punto, esto implica $g = 0$ en casi todo punto.

Para probar $L^P(\mu) = \overline{A \bigoplus B}$ vamos a utilizar la siguiente consecuencia del *teorema de Hanh-Banach* (véase [5]).

Sea Y un subespacio de un espacio normado X. Si Y no es denso en X, entonces existe un funcional $x^* \neq 0$ tal que $x^*(y) = 0$ para todo $y \in Y$.

Tomemos $A \bigoplus B$ como subespacio de $L^p(\mu)$, y supongamos por reducción al absurdo que no es denso en $L^p(\mu)$. Entonces existe $L : L^p(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $L(h) = 0$ para toda $h \in \overline{A \bigoplus B}$ y $L \neq 0$. Es decir, existe $f \in L^p(\mu)$ tal que $L(f) \neq 0$.

Sea $s \in L^p(\mu)$ una función simple. Entonces $s - Ts \in B$, y por tanto $0 = L(s - Ts) = L(s) - L(Ts)$, luego $L(s) = L(Ts)$. Por inducción podemos probar que $L(s) = L(T^k s)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, luego $L(A_n s) = L(s)$ para todo n. Como $A_n s$ converge en $L^p(\mu)$ a una cierta función invariante $\widetilde{s}$, entonces $L(A_n s) \longrightarrow L(\widetilde{s})$. Y como $L(A_n s) = L(s)$, entonces $L(s) = L(\widetilde{s})$. Además, como $\widetilde{s}$ es invariante, tenemos $\widetilde{s} \in A$, y por tanto $L(\widetilde{s}) = 0$. Es decir, $L(s) = 0$ para toda función simple en $L^p(\mu)$.

Sea $f \in L^p(\mu)$. Entonces existe una sucesión $\{s_k\}$ de funciones simples tal que $s_k \longrightarrow f$ en $L^p(\mu)$. Tenemos entonces $L(s_k) \longrightarrow L(f)$. Pero como $L(s_k) = 0$ para todo k, entonces necesariamente $L(f) = 0$. Por lo tanto acabamos de probar que $L(f) = 0$ para toda $f \in L^p(\mu)$, lo cual es una contradicción. Por tanto $A \bigoplus B$ es denso en $L^p(\mu)$. □

2.2. Convergencia en $L^p(\mu)$

Teorema 4.5. *Sean $0 < \alpha \leq 1$ y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Si $f \in L^p(\mu)$ con $\frac{1}{\alpha} < p < \infty$, entonces $R_n^\alpha f(x) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} f(\tau^k(x))$ converge en casi todo punto.*

Demostración: En vista de la descomposición de $L^p(\mu)$, en primer lugar estudiemos la convergencia en casi todo punto de funciones de $A \bigoplus B$. Sea $f \in A$, entonces

$$R_n^\alpha f(x) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} f(\tau(x)) = f(x) \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} = f(x),$$

que converge a $f(x)$ para todo $x \in X$.

Sea $g \in B$. Veamos que $R_n^\alpha g$ converge a 0 en casi todo punto. Como $g \in B$, entonces existe una función simple $f \in L^p(\mu)$ tal que $g = f - Tf$. Estudiemos primero el caso $f = \chi_A$ para A un conjunto medible de medida finita. Vamos a probar

$$\lim_{n\to\infty} R_n^\alpha(f - Tf) = 0 \qquad \text{en casi todo punto.} \tag{4.17}$$

En esta parte de la demostración vamos a seguir la tesis de Sarrión [12]. Para la demostración de (4.17), expresaremos $R_n^\alpha(f - Tf)$ como suma de tres términos, y estudiaremos la convergencia en casi todo punto de cada uno de ellos por separado. Tenemos

$$\begin{aligned}
R_n^\alpha(f - Tf)(x) =& \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} \left(T^k f(x) - T^{k+1} f(x)\right) \\
=& \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} T^k f(x) - \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} T^{k+1} f(x) \\
=& \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} T^k f(x) - \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=1}^{n+1} A_{n+1-k}^{\alpha-1} T^{k+1} f(x) \\
=& \frac{A_n^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} f(x) - \frac{T^{n+1} f(x)}{A_n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{A_{n-k}^{\alpha-1} - A_{n+1-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \right) T^k f(x) \\
=& \frac{A_n^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} f(x) - \frac{T^{n+1} f(x)}{A_n^\alpha} + \frac{1-\alpha}{A_n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{n+1-k} T^k f(x) \\
=& A_n(x) - B_n(x) + C_n(x).
\end{aligned}$$

En la penúltima igualdad hemos usado la siguiente propiedad de los coeficientes de Cesàro $A_n^\alpha - A_{n-1}^\alpha = A_n^{\alpha-1}$, para expresar el termino general de la de $C_n(x)$ como

$$\begin{aligned}
A_{n-k}^{\alpha-1} - A_{n+1-k}^{\alpha-1} =& - A_{n+1-k}^{\alpha-2} \\
=& - \frac{(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)...(\alpha-1+n-k)}{(n+1-k)(n-k)!} \\
=& - \frac{\alpha-1}{n+1-k} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha-1+n)}{(n-k)!} \\
=& \frac{1-\alpha}{n+1-k} A_{n-k}^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Estudiemos el término $A_n(x)$

$$\begin{aligned}
A_n(x) =& A_n^{\alpha-1} \frac{1}{A_n^\alpha} f(x) \\
=& \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha-1+n)}{n!} \cdot \frac{n!}{(\alpha+1)...(\alpha+n)} f(x) \\
=& \frac{\alpha}{\alpha+n} f(x)
\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} A_n(x) = 0$ para todo $x \in X$. Para probar que $\lim_{n\to\infty} B_n(x) = 0$ en casi todo $x \in X$, haremos un argumento similar al que hiciemos en la prueba de la Proposición 4.4, es decir, veremos que la siguiente integral es finita.

$$\begin{aligned}\int_X \sum_{k=1}^{\infty} |B_k(x)|^p \, d\mu(x) &= \int_X \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{T^{n+1} f(x)}{A_n^\alpha} \right|^p d\mu(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(A_n^\alpha)^p} \int_X \left| T^{k+1} f(x) \right|^p d\mu(x) \\ &= \|f\|_p^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(A_n^\alpha)^p} \\ &\leq C_\alpha \|f\|_p^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha p}} < \infty\end{aligned}$$

ya que $p > \frac{1}{\alpha}$ y $f \in L^p(\mu)$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} B_n(x) = 0$ en casi todo $x \in X$.
Por último,

$$\begin{aligned}C_n(x) =& \frac{1-\alpha}{A_n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{n+1-k} T^k f(x) \\ =& \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1-\alpha}{n+1-k} \right) T^k f(x) \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \\ \leq& \left[\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} \left(T^k f(x) \right)^r \right]^{\frac{1}{r}} \cdot \left[\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} \left(\frac{1-\alpha}{n+1-k} \right)^{r'} \right]^{\frac{1}{r'}} \\ =& \left[\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} \left(\chi_A(\tau^k(x)) \right)^r \right]^{\frac{1}{r}} \cdot \left[\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} \left(\frac{1-\alpha}{n+1-k} \right)^{r'} \right]^{\frac{1}{r'}} \\ =& \left[\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} \chi_A(\tau^k(x)) \right]^{\frac{1}{r}} \cdot \left[\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} \left(\frac{1-\alpha}{n+1-k} \right)^{r'} \right]^{\frac{1}{r'}} \\ =& \left[\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} T^k f(x) \right]^{\frac{1}{r}} \cdot \left[\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} \left(\frac{1-\alpha}{n+1-k} \right)^{r'} \right]^{\frac{1}{r'}} \\ \leq& \left(\mathcal{M}_\alpha f(x) \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} \left(\frac{1-\alpha}{n+1-k} \right)^{r'} \right)^{\frac{1}{r'}},\end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos usado la desigualdad de Hölder con exponentes conjugados $1 < r, r' < \infty$, con la siguiente medida sobre $\{0, ..., n\}$, $\nu(\{k\}) = \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}$.
Por tanto, como $\mathcal{M}_\alpha f$ es finita en casi todo punto ya que $f \in L^p(\mu)$ con $p > \frac{1}{\alpha}$, para obtener $\lim_{n\to\infty} C_n(x) = 0$ en casi todo punto, basta con probar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} \left(\frac{1-\alpha}{n+1-k} \right)^{r'} = 0. \tag{4.18}$$

Observemos que $A_n^\alpha \uparrow \infty$ cuando $n \to \infty$, y que

$$\frac{\sum_{k=0}^{n+1} A_{n+1-k}^{\alpha-1}\left(\frac{1-\alpha}{n+2-k}\right)^{r'} - \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1}\left(\frac{1-\alpha}{n+1-k}\right)^{r'}}{A_{n+1}^{\alpha} - A_n^{\alpha}}$$
$$= \frac{A_{n+1}^{\alpha-1}\left(\frac{1-\alpha}{n+2}\right)^{r'}}{A_{n+1}^{\alpha} - A_n^{\alpha}} = \frac{A_{n+1}^{\alpha-1}\left(\frac{1-\alpha}{n+2}\right)^{r'}}{A_n^{\alpha-1}\left(\frac{\alpha+1}{n+1}\right)}$$
$$= \left(\frac{1-\alpha}{n+2}\right)^{r'}\left(\frac{n+1}{\alpha+1}\right)\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n)}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}$$
$$= \left(\frac{1-\alpha}{n+2}\right)^{r'}\left(\frac{n+1}{\alpha+1}\right)\frac{n+\alpha}{n+1} = C_\alpha\frac{n+\alpha}{(n+2)^{r'}} \longrightarrow 0,$$

ya que $r' > 1$. Entonces, aplicando el *Criterio de Stolz* tenemos que $\lim_{n\to\infty} C_n(x) = 0$ en casi todo $x \in X$.
Hemos probado entonces $\lim_{n\to\infty} R_n^{\alpha}(f - Tf) = 0$ en casi todo punto para $f = \chi_A$. Sea $f = \sum_{k=1}^{N} b_k\chi_{A_k} \in L^p(\mu)$ una función simple. Por la linealidad de las medias de Cesàro de orden α tenemos

$$\begin{aligned} R_n^{\alpha}(f - Tf)(x) =& R_n^{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{N} b_k\chi_{A_k}(x) - \sum_{k=1}^{N} b_k\chi_{A_k}(\tau(x))\right) \\ =& \sum_{k=1}^{N} b_k R_n^{\alpha}\left(\chi_{A_k}(x) - \chi_{A_k}(\tau(x))\right). \end{aligned}$$

Como para cada $k \in \{1, ..., N\}$, hemos probado que $\lim_{n\to\infty} R_n^{\alpha}\left(\chi_{A_k}(x) - \chi_{A_k}(\tau(x))\right) = 0$ para casi todo $x \in X$, entonces $\lim_{n\to\infty} R_n^{\alpha}(f - Tf)(x) = 0$ para casi todo $x \in X$.
Hemos probado que si $f \in A\bigoplus B$, entonces $R_n^{\alpha}f$ converge en casi todo punto. Sean $f \in L^p(\mu)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces como $A\bigoplus B$ es denso en $L^p(\mu)$, existe $F \in A\bigoplus B$ tal que $\|f - F\|_p < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Definimos entonces $H = f - F$, y tenemos $f = F + H$, con $F \in A\bigoplus B$ y $\|H\|_p < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$.
Para probar que $\{R_n^{\alpha}f(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge para casi todo $x \in X$, veremos que $\{R_n^{\alpha}f(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en casi todo punto. Para cada $\gamma > 0$ definimos

$$E_\gamma = \{x \in X : \lim_{N\to\infty}\sup_{n,m\geq N} |R_n^{\alpha}f(x) - R_m^{\alpha}f(x)| > \gamma\}.$$

Veamos que $\mu(E_\gamma) = 0$ para todo $\gamma > 0$. Como $f = F + H$, por la linealidad de las medias de Cesàro tenemos

$$R_n^{\alpha}f(x) - R_m^{\alpha}f(x) = \left(R_n^{\alpha}F(x) - R_m^{\alpha}F(x)\right) + \left(R_n^{\alpha}H(x) - R_m^{\alpha}H(x)\right).$$

Además, como $F \in A\bigoplus B$, entonces $R_n^{\alpha}F$ converge salvo en un conjunto de medida nula N, y por tanto es de Cauchy en casi todo punto, tenemos entonces

$$E_\gamma \subset E'_\gamma = \{x \in X : \lim_{N\to\infty}\sup_{n,m\geq N} |R_n^{\alpha}H(x) - R_m^{\alpha}H(x)| > \gamma\} \cup N.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mu(E_\gamma) \leq \mu(E'_\gamma) \leq & \mu(\{x \in X : \lim_{N\to\infty} \sup_{n,m\geq N} |R_n^\alpha H(x) - R_m^\alpha H(x)| > \gamma\}) \\ \leq & \mu(\{x \in X : 2 \sup_n |R_n^\alpha H(x)| > \gamma\}) \\ \leq & \mu(\{x \in X : \mathcal{M}_\alpha H(x) > \frac{\gamma}{2}\}) \\ \leq & \frac{2^p}{\gamma^p} \|\mathcal{M}_\alpha H\|_p^p \leq \left(\frac{2C}{\gamma} \|H\|_p\right)^p < \left(\frac{2C}{\gamma}\right)^p \varepsilon.\end{aligned}$$

En la penúltima desigualdad hemos usado la desigualdad de tipo fuerte (p,p) para el operador $\mathcal{M}_\alpha$, ya que $p > \frac{1}{\alpha}$ (Teorema 4.2). Como esto es válido para todo $\varepsilon > 0$, entonces $\mu(E_\gamma) = 0$ para todo $\gamma > 0$. Por tanto, $\{R_n^\alpha f(x)\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy para casi todo $x \in X$, y como $\mathbb{R}$ es completo, entonces $\{R_n^\alpha f\}_{n=1}^\infty$ converge en casi todo punto. □

2.3. Convergencia en $L(\frac{1}{\alpha}, 1)$

Teorema 4.6. *Sean $0 < \alpha \leq 1$ y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Si $f \in L(\frac{1}{\alpha}, 1)$, entonces $R_n^\alpha f(x) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} f(\tau^k(x))$ converge en casi todo punto.*

Demostración: Sea p tal que $p > \frac{1}{\alpha}$, definimos el operador $T : L^p(\mu) \longrightarrow L^p(\mu)$, $Tf(x) = f(\tau(x))$. Sea $\varepsilon > 0$ y $f \in L(\frac{1}{\alpha}, 1)$, como $L(\frac{1}{\alpha}, 1) \cap L^p(\mu)$ es denso en $L(\frac{1}{\alpha}, 1)$, podemos escribir $f = F + H$ con $F \in L(\frac{1}{\alpha}, 1) \cap L^p(\mu)$ y $\|H\|_p < \varepsilon^\alpha$.
Para probar que $\{R_n^\alpha f(x)\}_{n=1}^\infty$ converge para casi todo $x \in X$, veremos que $\{R_n^\alpha f(x)\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy en casi todo punto. Para cada $\gamma > 0$ definimos

$$E_\gamma = \{x \in X : \lim_{N\to\infty} \sup_{n,m\geq N} |R_n^\alpha f(x) - R_m^\alpha f(x)| > \gamma\}.$$

Veamos que $\mu(E_\gamma) = 0$ para todo $\gamma > 0$. Como $f = F + H$, por la linealidad de las medias de Cesàro tenemos

$$R_n^\alpha f(x) - R_m^\alpha f(x) = (R_n^\alpha F(x) - R_m^\alpha F(x)) + (R_n^\alpha H(x) - R_m^\alpha H(x)).$$

Además, como $F \in L^p(\mu)$, por el Teorema 4.5 tenemos que $R_n^\alpha F$ converge salvo en un conjunto de medida nula Y, y por tanto es de Cauchy en casi todo punto, entonces tenemos

$$E_\gamma \subset E'_\gamma = \{x \in X : \lim_{N\to\infty} \sup_{n,m\geq N} |R_n^\alpha H(x) - R_m^\alpha H(x)| > \gamma\} \cup Y.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mu(E_\gamma) \leq \mu(E'_\gamma) \leq & \mu(\{x \in X : \lim_{N\to\infty} \sup_{n,m\geq N} |R_n^\alpha H(x) - R_m^\alpha H(x)| > \gamma\}) \\ \leq & \mu(\{x \in X : 2 \sup_n |R_n^\alpha H(x)| > \gamma\}) \\ \leq & \mu(\{x \in X : \mathcal{M}_\alpha H(x) > \frac{\gamma}{2}\}).\end{aligned}$$

De la desigualdad de tipo débil restringido $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})$,

$$\|\mathcal{M}_\alpha H\|_{\frac{1}{\alpha},\infty} \leq C \|H\|_{\frac{1}{\alpha},1}$$

podemos obtener que para todo $t > 0$ se tiene

$$\mu(\{x \in X : \mathcal{M}_\alpha H(x) > \frac{t}{2}\}) \leq \left(\frac{2C}{t} \|H\|_{\frac{1}{\alpha},1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{4.19}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mu(E_\gamma) \leq \mu(E'_\gamma) \leq & \mu(\{x \in X : \mathcal{M}_\alpha H(x) > \frac{\gamma}{2}\}) \\ & \leq \left(\frac{2C}{\gamma} \|H\|_{\frac{1}{\alpha},1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\frac{2C}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \varepsilon.\end{aligned}$$

Como esto es válido para todo $\varepsilon > 0$, entonces $\mu(E_\gamma) = 0$ para todo $\gamma > 0$. Por tanto, $\{R_n^\alpha f(x)\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy para casi todo $x \in X$, y como $\mathbb{R}$ es completo, entonces $\{R_n^\alpha f\}_{n=1}^\infty$ converge en casi todo punto. □

3. Convergencia en norma y en medida

El objetivo de esta sección es probar la convergencia en norma y en medida de las medias $R_n^\alpha f$. En primer lugar probaremos la convergencia en $L^p(\mu)$ utilizando que el operador $\mathcal{M}_\alpha$ es de tipo fuerte (p,p) para $\frac{1}{\alpha} < p < \infty$.

Teorema 4.7. *Sean $0 < \alpha \leq 1$, $\frac{1}{\alpha} < p < \infty$ y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Entonces $R_n^\alpha f(x) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} f(\tau^k(x))$ converge en $L^p(\mu)$ para toda $f \in L^p(\mu)$.*

Demostración: Sea $f \in L^p(\mu)$, entonces por el Teorema 4.5 tenemos que existe f^* tales que $R_n^\alpha f \longrightarrow f^*$ en casi todo punto. Veamos que $\lim_{n\to\infty} \|R_n^\alpha f - f^*\|_p = 0$. Observemos que $|R_n^\alpha f| \leq \mathcal{M}_\alpha f \in L^p(\mu)$, ya que por el Teorema 4.2 tenemos que $\|\mathcal{M}_\alpha f\|_p \leq A \|f\|_p < \infty$. Entonces aplicando el Teorema de la convergencia dominada en $L^p(\mu)$ concluimos que $R_n^\alpha f \longrightarrow f^*$ en $L^p(\mu)$. □

Observación 4.8. Observemos que, en vista de la desigualdad del Teorema 3.22, el teorema anterior implica la convergencia en norma $\|.\|_{p,\infty}$ para toda $f \in L^p(\mu)$ con $\frac{1}{\alpha} < p < \infty$.

Como corolario inmediato de la convergencia en $L^p(\mu)$ obtenemos la convergencia en medida de las medias $R_n^\alpha f$ para toda $f \in L^p(\mu)$.

Corolario 4.9. *Sean $0 < \alpha \leq 1$, $\frac{1}{\alpha} < p < \infty$ y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Si $f \in L^p(\mu)$, entonces $R_n^\alpha f(x) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} f(\tau^k(x))$ converge en $L(p,\infty)$ y, por lo tanto, en medida.*

Como consecuencia de este resultado, utilizando un argumento de densidad vamos a probar la convergencia en medida para toda $f \in L(\frac{1}{\alpha}, 1)$.

Teorema 4.10. *Sean $0 < \alpha \leq 1$ y $\tau : X \longrightarrow X$ una transformación que conserva la medida. Entonces $R_n^\alpha f(x) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} f(\tau^k(x))$ converge en medida para toda $f \in L(\frac{1}{\alpha}, 1)$.*

Demostración: Sea $f \in L(\frac{1}{\alpha}, 1)$, entonces por el Teorema 4.6 existe f^* tal que $R_n^\alpha f \longrightarrow f^*$ en casi todo punto. Tenemos que probar que para todo $\lambda > 0$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |R_n^\alpha f(x) - f^*(x)| > \lambda\}) = 0.$$

Sean $\varepsilon, \lambda > 0$ y $p > \frac{1}{\alpha}$, como $L^p(\mu) \cap L(\frac{1}{\alpha}, 1)$ es denso en $L(\frac{1}{\alpha}, 1)$, existe $g \in L^p(\mu) \cap L(\frac{1}{\alpha}, 1)$ tal que $\|f - g\|_{\frac{1}{\alpha},1} < \left(\frac{\lambda\varepsilon}{8C}\right)^\alpha$, donde C es la constante de la desigualdad de tipo débil restringido $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})$ para el operador $\mathcal{M}_\alpha$. Como $g \in L^p(\mu)$, entonces por el Teorema 4.9 tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\mu(\{x \in X : |R_n^\alpha g(x) - g^*(x)| > \lambda\}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $x \in X$ tal que $|R_n^\alpha f(x) - f^*(x)| > \lambda$, entonces

$$\begin{aligned}
\lambda < |R_n^\alpha f(x) - f^*(x)| \leq & |R_n^\alpha f(x) - R_n^\alpha g(x)| + |R_n^\alpha g(x) - g^*(x)| + |g^*(x) - f^*(x)| \\
= & |R_n^\alpha (f-g)(x)| + |R_n^\alpha g(x) - g^*(x)| + |(f-g)^*(x)| \\
\leq & 2\mathcal{M}_\alpha(f-g)(x) + |R_n^\alpha g(x) - g^*(x)|.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\{x \in X : |R_n^\alpha f(x) - f^*(x)| > \lambda\} \subset & \{x \in X : 2\mathcal{M}_\alpha(f-g)(x) > \frac{\lambda}{2}\} \\
& \cup \{x \in X : |R_n^\alpha g(x) - g^*(x)| > \frac{\lambda}{2}\}.
\end{aligned}$$

Sea $n \geq n_0$, entonces aplicando la desigualdad de tipo débil restringido $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})$ (Teorema 4.1) tenemos

$$\begin{aligned}
\mu(\{x \in X : |R_n^\alpha f(x) - f^*(x)| > \lambda\}) \leq & \mu(\{x \in X : 2\mathcal{M}_\alpha(f-g)(x) > \frac{\lambda}{2}\}) \\
& + \mu(\{x \in X : |R_n^\alpha g(x) - g^*(x)| > \frac{\lambda}{2}\}) \\
\leq & \frac{4C}{\lambda} \|f-g\|_{\frac{1}{\alpha},1}^{\frac{1}{\alpha}} + \mu(\{x \in X : |R_n^\alpha g(x) - g^*(x)| > \frac{\lambda}{2}\}) \\
< & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

4. Necesidad del espacio $L(\frac{1}{\alpha}, 1)$

Para finalizar, vamos a observar que $L(\frac{1}{\alpha}, 1)$ es el mayor espacio, en cierto sentido, para el que se tiene la convergencia en casi todo punto de las medias $R_n^\alpha f$. Más concretamente, $L(\frac{1}{\alpha}, 1)$ es el mayor espacio invariante bajo reordenamiento para el que se tiene la convergencia en casi todo punto. Es decir, dada una transformación τ que conserve la medida, y función $f \notin L(\frac{1}{\alpha}, 1)$, existe una función f' equimedible con f, tal que $R_n^\alpha f'$ no converge en casi todo punto. Este resultado se debe a *Broise, Déniel* y *Derriennic*, la demostración puede encontrarse en [2].

Teorema 4.11. *Sea $\tau : (0,1] \longrightarrow (0,1]$ una transformación ergódica que conserva la medida. Entonces, para $0 < \alpha < 1$, $f \geq 0$ y $f \notin L(\frac{1}{\alpha}, 1)$ existe una función f' equimedible con f tal que*

$$\limsup_{n\to\infty} R_n^\alpha f'(x) = \infty$$

para casi todo $x \in X$.

Observación 4.12. De hecho, en [2] también se prueba que si $f \in L^1(\mu)$, entonces

$$\liminf_{n\to\infty} R_n^\alpha f' \leq \int_X f d\mu$$

en casi todo punto.

La demostración de este teorema se basa en el método de apilamiento (véase [6]). Se toma una transformación τ definida en $(0,1]$ que viene dada por el método de apilamiento correspondiente a la división por 2; se puede probar que estas transformaciones conservan la medida y son ergódicas. Dada una función $f \notin L(\frac{1}{\alpha}, 1)$, debido a que τ está definida por el método de apilamiento, se puede encontrar una transformación θ que conserva la medida tal que

$$\limsup_{n\to\infty} R_n^\alpha (f^* \circ \theta) = \infty$$

en casi todo punto, donde f^* es el reordenamiento decreciente de f. Observemos que la función $f^* \circ \theta$ es equimedible con f, ya que θ conserva la medida y f^* es equimedible con f.

Este resultado nos asegura que, en general, no se tiene la convergencia de las medias $R_n^\alpha f$ para $f \in L^{\frac{1}{\alpha}}(\mu)$.

Apéndice A

Función maximal de Hardy-Littlewood

Definición A.1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos la **función maximal** de f como

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|dy \tag{A.1}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$, y donde el supremo se toma sobre todas las bolas B que contienen a x.

Para probar propiedades de la función maximal necesitamos el siguiente lema de recubrimiento.

Lema A.2. *Supongamos $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_N\}$ una colección finita de bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una subcolección finita de $\mathcal{B}$ disjunta. $B_{i_1}, ..., B_{i_k}$, tal que*

$$m\left(\bigcup_{l=1}^{N} B_l\right) \leq 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}).$$

Demostración: Vamos a dar un argumento constructivo: tomemos como B_{i_1} la bola con mayor radio de $\mathcal{B}$. Entonces eliminamos de $\mathcal{B}$ la bola B_{i_1} y todas las que intersequen a B_{i_1}. Todas las bolas eliminadas están contenidas en la bola $\tilde{B}_{i_1}$ concéntrica con B_{i_1} y de 3 veces el radio de B_{i_1}.
Las bolas restantes están en una nueva colección $\mathcal{B}'$, para la que podemos repetir este proceso. Después de, como mucho N pasos, obtenemos una colección disjunta de bolas $B_{i_1}, ..., B_{i_k}$. Denotemos por $\tilde{B}_{i_j}$ a la bola concéntrica con B_{i_j} y 3 veces su radio. Observemos que toda bola $B \in \mathcal{B}$ debe intersecar a un B_{i_j}, y tiene menor o igual radio que B_{i_j}, tenemos $B \subset \tilde{B}_{i_j}$. Además, se verifica

$$m\left(\bigcup_{l=1}^{N} B_l\right) \leq m\left(\bigcup_{j=1}^{k} \tilde{B}_{i_j}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} m(\tilde{B}_{i_j}) = 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}).$$

□

Teorema A.3. *Supongamos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces:*

1. *Mf es medible.*

2. *Mf satisface,*

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n / Mf(x) > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_1 . \tag{A.2}$$

para todo $\alpha > 0$, donde $A = 3^n$.

3. *$Mf(x) < \infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración:

1. Veamos que $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n / Mf(x) > \alpha\}$ es abierto, y por tanto medible borel. Sea $\bar{x} \in E_\alpha$, entonces existe una bola B con $\bar{x} \in B$ y

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy > \alpha.$$

Por lo tanto, todo x en un entorno $\bar{x}$ pertenece a B, y como consecuencia $x \in E_\alpha$. Es decir, para cada $\bar{x} \in E_\alpha$ hemos encontrado un entorno U abierto tal que $U \in E_\alpha$, luego E_α es abierto.

2. Sea $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n / Mf(x) > \alpha\}$, entonces para cada $x \in E_\alpha$ existe una bola B_x con $x \in B_x$ tal que

$$m(B_x) < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)| dy. \tag{A.3}$$

Sea K un subconjunto compacto de E_α, observemos que K es recubierto por $\bigcup_{x \in E_\alpha} B_x$, y por la compacidad de K podemos extraer un subrrecubrimiento finito de K, es decir $K \subset \bigcup_{l=1}^N B_l$. Por el lema anterior extraemos una subcolección $B_{i_1}, ..., B_{i_k}$ de bolas disjuntas, con:

$$m\left(\bigcup_{l=1}^N B_l\right) \leq 3^n \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}). \tag{A.4}$$

Como las bolas $B_{i_1}, ..., B_{i_k}$ son disjuntas y satisfacen (A.3) y (A.4) tenemos

$$\begin{aligned} m(K) \leq & m\left(\bigcup_{l=1}^N B_l\right) \leq 3^n \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}) \leq \frac{3^n}{\alpha} \sum_{j=1}^k \int_{B_{i_j}} |f(y)| \, dy \\ = & \frac{3^n}{\alpha} \int_{\bigcup_{j=1}^k B_{i_j}} |f(y)| \, dy \leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \, dy = \frac{A}{\alpha} \|f\|_1 . \end{aligned}$$

Como esta desigualdad es válida para todo subconjunto compacto $K \subset E_\alpha$, y tenemos que $m(E_\alpha) = \sup\{m(K) / K$ es compacto y $K \subset E_\alpha\}$, entonces es válida para el conjunto E_α.

3. Observemos que $\{x \in \mathbb{R}^n / Mf(x) = \infty\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n / Mf(x) > \alpha\}$ para todo $\alpha > 0$. Tomando límite cuando $\alpha \to \infty$ en (A.2) obtenemos $m(\{x \in \mathbb{R}^n / Mf(x) = \infty\}) = 0$.

□

Bibliografía

[1] Bennett, C.; Sharpley, R. *Interpolation of Operators*; Pure and Applied Mathematics, 129; Academic Press: Boston; 1988.

[2] Broise, Michel; Déniel, Yves; Derriennic, Yves. *Réarrangement, inégalités maximales et théorèmes ergodiques fractionnaires*. Annales de lÍnstitut Fourier, Volume 39 (1989) no. 3, pp. 689-714.

[3] Dajani K. *Ergodic theory of numbers*. Mathematical Association of America; 2014.

[4] Duren PL. *Invitation to Classical Analysis*. Providence, R.I.: American Mathematical Society; 2012.

[5] Friedman A. *Foundations of Modern Analysis*. 1St ed. in Dover ed. New York: Dover; 1982.

[6] Friedman NA. *Introduction to Ergodic Theory*. New York: Van Nostrand Reinhold; 1970.

[7] Hardy, G. H. *Divergent Series*, Clarendon Press: Oxford; 1967.

[8] Hunt, Richard A. *An extension of the Marcinkiewicz interpolation theorem to Lorentz spaces*. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), no. 6, 803–807.

[9] Kristiansson, Erik. *Decreasing Rearrangement and Lorentz $L(p, q)$ Spaces*. Master's thesis, Lulea University of Technology; 2002.

[10] Millán Valldeperas, Eva. *Extensiones y aplicaciones de los Teoremas Ergódicos clásicos*. Tesis de Licenciatura en Ciencias Matemáticas. Universidad de Málaga; 1991.

[11] Petersen K. *Ergodic Theory*. Cambridge: University Press; 1982.

[12] Sarrión Gavilán, María Dolores. *Operadores maximales laterales en espacios $L_{p,q}$ con pesos y convergencia de medias de Cesàro de orden α, $0 < \alpha \leq 1$, en Teoría Ergódica*. Universidad de Málaga; 1996.

[13] Silva CE. *Invitation to Ergodic Theory*. Providence, R.I.: American Mathematical Society; 2008.

[14] Stein EM.; Weiss GL. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton, New Jersey: University Press; 1990.

[15] Stein EM.; Shakarchi R. *Real Analysis : Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton, N.J.: Princeton University Press; 2005.

[16] Tao, Terence. *245C, Notes 1: Interpolation of L^p spaces*; What's new, 2009. https://terrytao.wordpress.com/2009/03/30/245c-notes-1-interpolation-of-lp-spaces.

[17] Zygmund A. *Trigonometric Series*. 3rd ed. Cambridge: University Press; 2002.