

Universidad de Málaga
Facultad de ciencias

Trabajo Fin de Máster

Desigualdades con pesos para operadores maximales de Hardy-Littlewood asociados a medidas generales

Weighted inequalities for Hardy-Littlewood maximal operators associated with general measures

---

Trabajo de Fin de Máster en Matemáticas (20 créditos)

Autor: **Alejandro Claros Pérez**

Tutor: **Francisco Javier Martín Reyes**

Área de conocimiento y/o departamento: **Análisis Matemático, Estadística e Investigación operativa y Matemática aplicada.**

Julio 2020

Es un placer para mi agradecer al Profesor D. Francisco Javier Martín Reyes por su ayuda, sus enseñanzas y sus consejos durante la realización de este trabajo.

Índice general

Resumen v

Abstract v

Introducción v

1. Operador maximal de Hardy-Littlewood 1
1. Preliminares . . . 1
1.1. Medidas doblantes . . . 1
1.2. Lema de recubrimiento de Besicovitch . . . 2
2. Función maximal de Hardy-Littlewood asociada a una medida de Borel . . . 4
3. Funciones maximales laterales . . . 12
4. Teorema de diferenciación de Lebesgue . . . 17
5. Descomposición de Calderón-Zygmund . . . 20

2. Desigualdades con pesos para M_μ 25
1. Pares de pesos $A_p(\mu)$ . . . 26
1.1. Caracterización alternativa de la condición $A_p(\mu)$ . . . 27
1.2. Propiedades de los pares de pesos $A_p(\mu)$ . . . 28
2. Caracterización de los pares de pesos (u, v) para los que M_μ es de tipo débil (p, p) . . . 29
3. Caracterización de los pares de pesos (u, v) para los que M_μ es de tipo fuerte (p, p) . . . 35
4. Acotación de M_μ con pesos iguales . . . 39
5. Desigualdad de Hölder inversa . . . 43
6. Clase de pesos $A_\infty(\mu)$ . . . 48
7. Caracterización de pesos $A_1(\mu)$ . . . 52
8. Factorización de pesos $A_p(\mu)$ . . . 53
9. Teoría de pesos $A_p(\mu)$ para medidas no doblantes . . . 56
9.1. Apertura a la izquierda de la clase $A_p(\mu)$ . . . 57

3. Desigualdades con pesos para M_μ^+ 59
1. Pares de pesos $A_p^+(\mu)$ y $A_p^-(\mu)$ . . . 60
2. Caracterización de los pares de pesos (u, v) para los que M_μ^+ es de tipo débil (p, p) . . . 68
3. Caracterización de los pares de pesos (u, v) para los que M_μ^+ es de tipo fuerte (p, p) . . . 75
4. Acotación de M_μ^+ con pesos iguales . . . 80
5. Desigualdades con pesos para M_μ para medidas no doblantes en $\mathbb{R}$ . . . 84

6. Factorización de pesos $A_p^+(\mu)$ 87

4. Desigualdades con pesos para el operador maximal diádico lateral **91**
1. Función maximal diádica en $\mathbb{R}^n$ 92
2. Función maximal diádica lateral 93
   2.1. Propiedades de duplicación laterales 93
   2.2. Definición de la función maximal diádica lateral 94
   2.3. Relación de $M_{\mu,d}^+$ con M_μ^+ 96
3. Pares de pesos $A_{p,d}^+(\mu)$ y $A_{p,d}^-(\mu)$ 99
4. Caracterización de los pares de pesos (u, v) para los que $M_{\mu,d}^+$ es de tipo débil (p, p) 101
5. Caracterización de los pares de pesos (u, v) para los que $M_{\mu,d}^+$ es de tipo fuerte (p, p) 106
6. Acotación de $M_{\mu,d}^+$ con pesos iguales 110
7. Desigualdades con pesos para $M_{\mu,d}$ en $\mathbb{R}$ 112

Bibliografía **116**

Desigualdades con pesos para operadores maximales de Hardy-Littlewood asociados a medidas generales

Resumen

El objetivo este trabajo es estudiar desigualdades con pesos para varios operadores maximales de Hardy-Littlewood asociados a medidas de Borel (positivas) y finitas sobre conjuntos compactos. Concretamente estudiaremos tres operadores: el operador maximal de Hardy-Littlewood, los operadores maximales de Hardy-Littlewood laterales y los operadores maximales diádicos laterales. Para estos operadores caracterizaremos los pares de pesos para los que son de tipo débil (p,p) con respecto al par de medidas $(ud\mu, vd\mu)$, $p \geq 1$, así como los pares (u,v) para los que están acotados de $L^p(vd\mu)$ en $L^p(ud\mu)$, $p > 1$. También estudiaremos las cuestiones anteriores para pesos iguales.

En el primer capítulo estudiaremos el operador maximal de Hardy-Littlewood asociado a una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos. El siguiente capítulo está dedicado a estudiar desigualdades con pesos para este operador con una hipótesis adicional en la medida, que μ verifique la propiedad de duplicación.

En el tercer capítulo estudiaremos desigualdades con pesos para los operadores maximales de Hardy-Littlewood laterales asociados a medidas de Borel μ en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados.

En el último capítulo definiremos los operadores maximales diádicos laterales asociados a una medida de Borel μ finita sobre conjuntos acotados, y estudiaremos sus propiedades. Seguidamente estudiaremos desigualdades con pesos para estos operadores.

Palabras clave:

Operador maximal de Hardy-Littlewood, Operador maximal de Hardy-Littlewood lateral, Operador maximal de Hardy-Littlewood diádico lateral, Desigualdades con pesos, Medidas generales

Weighted inequalities for Hardy-Littlewood maximal operators associated with general measures

Abstract

The main objective of this work is to study weighted inequalities for Hardy-Littlewood maximal operators associated with positive Borel measures which are finite on compact sets. Concretely, we will study three operators: the Hardy-Littlewood maximal operator, the one-sided Hardy-Littlewood maximal operators and the one-sided dyadic Hardy-Littlewood maximal operators. We will characterize the pairs of weights for which these operators are of weak type (p,p) with respect to the pair of measures $(ud\mu, vd\mu)$, $p \geq 1$, as well as the pairs of weights (u,v) for which are bounded from $L^p(vd\mu)$ into $L^p(ud\mu)$, $p > 1$. We also study the above questions for equal weights.

In the first chapter, we will study the Hardy-Littlewood maximal operator associated with a Borel measure in $\mathbb{R}^n$ which is finite in compact sets. The second chapter is dedicated to study weighted inequalities for this operator, with the following hypothesis: μ is a doubling measure.

In the third chapter, we will study weighted inequalities for the one-sided Hardy-Littlewood maximal operators associated with a Borel measure μ in $\mathbb{R}$ which is finite in bounded sets.

In the last chapter we introduce the one-sided dyadic Hardy-Littlewood maximal operators associated with a Borel measure μ in $\mathbb{R}$ which is finite in bounded sets. We will study its properties and weighted inequalities for these operators.

Key words:

Hardy-Littlewood maximal operator, one-sided Hardy-Littlewood maximal operator, one-sided dyadic Hardy-Littlewood maximal operator, weighted inequalities, general measures

Introducción

En 1930, *Hardy* y *Littlewood* [15] introdujeron la función maximal en $\mathbb{R}$, definida de la siguiente forma, dada una función $f : (0, a) \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integrable se define

$$f^*(x) = \sup_{0<y<x} \frac{1}{x-y} \int_y^x |f(t)|dt.$$

En ese artículo probaron que el operador $f \mapsto f^*$ es acotado en L^p para todo $p > 1$ y, que para $p = 1$ la acotación falla. Esta definición puede extenderse a funciones definidas en $\mathbb{R}$ y es lo que actualmente llamamos operador maximal de Hardy-Littlewood lateral a la izquierda. La versión en $\mathbb{R}^n$ fue estudiada por primera vez por *N. Wiener* en 1939 y desde entonces estos operadores han sido de gran interés. Se define operador maximal de Hardy-Littlewood centrado en $\mathbb{R}^n$ para cada función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ como

$$M^c f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y)|dy,$$

donde $Q(x, r)$ es el cubo de lados paralelos a los ejes coordenados con centro x y lado r, y $|E|$ es la medida de Lebesgue un conjunto medible-Lebesgue E. También se puede definir la versión no centrada del operador anterior, para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|dy,$$

donde el supremo se toma sobre todas las cubos Q que contienen a x. Los operadores anteriores son de tipo débil $(1, 1)$, y de tipo fuerte (p, p) para todo $p > 1$. Una de las aplicaciones de estos operadores es el teorema de diferenciación de Lebesgue. La generalización de este teorema a medias sobre otras familias de conjuntos da lugar a muchas variantes del operador maximal de Hardy-Littlewood. Por ejemplo, en las definiciones anteriores podríamos haber tomado bolas euclídeas en $\mathbb{R}^n$.

Posteriormente, *Fefferman* y *Stein* [7] probaron la que se puede considerar primera desigualdad con pesos generales. Decimos que $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es un peso si es localmente integrable y verifica $0 < w < \infty$ en casi todo punto. La desigualdad de Fefferman-Stein afirma que existe una constante $c_n > 0$ tal que para toda f y todo peso w se verifica

$$\int_{\{y\in\mathbb{R}^n : Mf(y)>\lambda\}} w(x)dx \leq \frac{c_n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|Mw(x)dx,$$

para todo $\lambda > 0$. Decimos que $w \in A_1$ si existe $C > 0$ tal que $Mw(x) \leq Cw(x)$ en casi todo punto. Entonces de la desigualdad anterior se deduce que si $w \in A_1$, entonces M es acotado de $L^1(w)$ en $L^{1,\infty}(w)$. Se puede probar que el recíproco también es cierto.

En 1972, *Benjamin Muckenhoupt* [26] caracterizó lo pesos w para los que el operador maximal de Hardy-Littlewood es acotado en $L^p(w)$, $p > 1$. Decimos que $w \in A_p$ si existe $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}dx\right)^{p-1} \leq C,$$

para todo cubo Q, donde p' es el exponente conjugado de p. Para $p > 1$, *Muckenhoupt* probó que M es acotado en $L^p(w)$ si y solo si $w \in A_p$. Esto inició la teoría de desigualdades con pesos para operadores maximales. En este trabajo estudiaremos estas cuestiones para operadores maximales de Hardy-Littlewood asociados a medidas de Borel en $\mathbb{R}^n$ finitas sobre conjuntos compactos.

El primer capítulo está dedicado a estudiar el operador maximal de Hardy-Littlewood asociado a una medida μ de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre compactos. Para cada función localmente integrable respecto a μ definimos el operador maximal centrado como

$$M_\mu^c f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(Q(x,r))}\int_{Q(x,r)} |f(y)|d\mu(y),$$

y el operador maximal no centrado como

$$M_\mu f(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{\mu(Q)}\int_{Q} |f(y)|d\mu(y),$$

donde el supremo se toma sobre todas las cubos Q que contienen a x, y los cocientes de la forma $\frac{0}{0}$ se consideran iguales a 0. Observemos que, en general, se verifica la desigualdad $M_\mu^c f \leq M_\mu f$.
Para probar algunos resultados tendremos que suponer una condición adicional sobre la medida μ. Decimos que una medida de Borel μ en $\mathbb{R}^n$ tiene la propiedad de duplicación si existe una constante $D(\mu) > 0$ tal que

$$\mu(Q(x,3r)) \leq D(\mu)\mu(Q(x,r)),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $r > 0$. Bajo esta hipótesis adicional en la medida, se puede probar que los operadores M_μ y M_μ^c son puntualmente equivalentes. La propiedad de duplicación nos permitirá seguir las mismas demostraciones que se hacen para M y M^c, y por tanto probaremos que si μ cumple la propiedad de duplicación entonces los operadores M_μ y M_μ^c son tipo débil $(1,1)$, de tipo fuerte (∞,∞), y por tanto de tipo fuerte (p,p) para todo $p > 1$. Si prescindimos de la propiedad de duplicación, únicamente podremos asegurar que M_μ^c es de tipo débil $(1,1)$ y de tipo fuerte (p,p) para todo $p > 1$. Vamos a dar ejemplos de que M_μ no es, en general, de tipo débil $(1,1)$ ni de tipo fuerte (p,p) para medidas sin la propiedad de duplicación.

Sin embargo, para $n = 1$ la geometría de $\mathbb{R}$ nos permitirá probar que M_μ es de tipo débil $(1,1)$ de tipo fuerte (p,p) para todo $p > 1$. Para ello usaremos los operadores maximales de Hardy-Littlewood laterales. Dada una función $f \in L^1_{loc}(\mu)$, definimos la función maximal de Hardy-Littlewood lateral a la derecha con respecto a la medida μ como

$$M_\mu^+ f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{\mu([x,x+h))}\int_{[x,x+h)} |f(y)|\, d\mu(y),$$

y, análogamente se define la maximal lateral a la izquierda con respecto a la medida μ,

$$M_\mu^- f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{\mu((x-h,x])} \int_{(x-h,x]} |f(y)|\, d\mu(y),$$

donde los cocientes de la forma $\frac{0}{0}$ se consideran iguales a 0. Estos operadores son de tipo débil $(1,1)$ y, como consecuencia la desigualdad $M_\mu f \leq M_\mu^+ f + M_\mu^- f$ obtendremos que M_μ es de tipo débil $(1,1)$.

En el segundo capítulo se estudian desigualdades con pesos para el operador M_μ, donde μ es una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. En primer lugar definiremos la condición $A_p(\mu)$:

- Si $1 < p < \infty$ decimos que $(u,v) \in A_p(\mu)$, si existe $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q u(x) d\mu(x)\right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{1-p'} d\mu(x)\right)^{p-1} \leq C,$$

  para todo cubo Q, donde entendemos $0 \cdot \infty = 0$.

- Diremos que $(u,v) \in A_1(\mu)$, si existe una constante $C > 0$ tal que $M_\mu u(x) \leq C v(x)$ en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Esta condición es equivalente a que el operador M_μ sea de tipo débil (p,p) con respecto al par de medidas $(ud\mu, vd\mu)$, esto es, existe una constante $C > 0$ tal que para cada función $f \in L^p(vd\mu)$ se verifica

$$\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(y) > \lambda\}} u(x) d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x) d\mu(x),$$

para todo $\lambda > 0$. También caracterizaremos los pares de pesos (u,v) para los que M_μ está acotado de $L^p(vd\mu)$ en $L^p(ud\mu)$, $p > 1$. Además, probaremos que para pesos iguales, $u = v$, y $p > 1$ el tipo débil y el tipo fuerte son equivalentes. Para probar esta última equivalencia estudiaremos la desigualdad de Hölder inversa y, como consecuencia, la importante propiedad de apertura a la izquierda de las clases $A_p(\mu)$: si $w \in A_p(\mu)$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\varepsilon}(\mu)$.

Seguidamente estudiaremos la clase de pesos $A_\infty(\mu) = \bigcup_{1<p<\infty} A_p(\mu)$, y el teorema de Jones de factorización de pesos $A_p(\mu)$. En la última sección se exponen algunos de los resultados existentes de la teoría de pesos $A_p(\mu)$ para medidas no necesariamente doblantes. Veremos que para medidas generales la propiedad de apertura a la izquierda de las clases $A_p(\mu)$ es falsa, es decir daremos una medida μ y un peso $w \in A_p(\mu)$ tal que $w \notin A_{p-\varepsilon}(\mu)$ para todo $\varepsilon > 0$.

En el tercer capítulo estudiaremos desigualdades con pesos para los operadores M_μ^+ y M_μ^-. Esta teoría de pesos fue desarrollada por *Sawyer* en 1986 para μ la medida de Lebesgue [32], posteriormente en 1990, por *Martín-Reyes, Ortega* y *de la Torre* para medidas absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue [23]. Finalmente en 1991, *K. F. Andersen* [1] caracterizó los pesos buenos para el operador M_μ^+, para medidas de Borel generales. Para ello no es necesario suponer ninguna condición de duplicación sobre la medida μ.

En primer lugar, dado $1 \leq p < \infty$, caracterizaremos los pares de pesos (u, v) tales que los operadores M_μ^+ y M_μ^- son de tipo débil (p, p) con respecto al par de medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Veremos que para cada operador se puede determinar una condición, $A_p^+(\mu)$ y $A_p^-(\mu)$, para la que esto se cumple si y sólo si (u, v) es un par de pesos que verifica esta condición.

En segundo lugar, dado $1 < p < \infty$, caracterizaremos los pares de pesos (u, v) tales que los operadores M_μ^+ y M_μ^- son de tipo fuerte (p, p) con respecto al par de medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Veremos que para cada operador se puede determinar una condición, denotada por $S_p^+(\mu)$ y $S_p^-(\mu)$, respectivamente, para la que esto se cumple si y sólo si (u, v) es un par de pesos que verifica esta condición. Por último estudiaremos el problema anterior para el caso de dos pesos iguales, $u = v$, y veremos que en este caso es equivalente a que se verifique la correspondiente condición $A_p^+(\mu)$ o $A_p^-(\mu)$.

Estos resultados sobre maximales laterales y la propiedad $A_p(\mu) = A_p^+(\mu) \cap A_p^-(\mu)$, nos permitirán extender los resultados del capítulo anterior, para $n = 1$, a medidas no necesariamente doblantes. El capítulo finaliza con un resultado de factorización de pesos $A_p^+(\mu)$.

Los operadores maximales diádicos laterales (con respecto a la medida de Lebesgue) fueron introducidos por Lorente y Martín-Reyes [21] en 2014. En el cuarto capítulo vamos a extender los resultados de [21] a medidas de Borel en $\mathbb{R}$ finitas sobre conjuntos acotados. En primer lugar trabajaremos con el operador maximal diádico $M_{\mu,d}$, definido para cada $f \in L^1_{loc}(\mu)$ como

$$M_{\mu,d} f(x) = \sup_{I \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\mu(I)} \int_I |f| d\mu \right) \chi_I(x).$$

Probaremos que $M_{\mu,d}$ es de tipo débil $(1, 1)$ y de tipo fuerte (p, p) para todo $p > 1$. Para introducir los operadores maximales diádicos laterales necesitaremos algo de notación, si $I = [a, b)$ es un intervalo acotado en $\mathbb{R}$, vamos a denotar $I^- = [a, \frac{a+b}{2})$ e $I^+ = [\frac{a+b}{2}, b)$. Observemos que si I es un intervalo diádico, entonces I^+ e I^- también son intervalos diádicos. Definimos los operadores maximales diádicos laterales para cada función $f \in L^1_{loc}(\mu)$ como

$$M^+_{\mu,d} f(x) = \sup_{I \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\mu(I)} \int_{I^+} |f| d\mu \right) \chi_{I^-}(x),$$

y

$$M^-_{\mu,d} f(x) = \sup_{I \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\mu(I)} \int_{I^-} |f| d\mu \right) \chi_{I^+}(x).$$

Es fácil comprobar que se verifica la relación $M^+_{\mu,d} f(x), M^-_{\mu,d} f(x) \leq M_{\mu,d} f(x) \leq M^+_{\mu,d} f(x) + M^-_{\mu,d} f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como consecuencia obtendremos que $M^+_{\mu,d}$ y $M^-_{\mu,d}$ son de tipo débil $(1, 1)$, y de tipo fuerte (p, p) para todo $p > 1$.

Dado $1 \leq p < \infty$, caracterizaremos los pares de pesos (u, v) tales que los operadores $M^+_{\mu,d}$ y $M^-_{\mu,d}$ son de tipo débil (p, p) con respecto al par de medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Veremos que para cada operador se puede determinar una condición, $A^+_{p,d}(\mu)$ y $A^-_{p,d}(\mu)$, para la que esto se cumple si, y sólo si, (u, v) es un par de pesos que verifica esta condición.

En segundo lugar, dado $1 < p < \infty$, caracterizaremos los pares de pesos (u, v) tales que los operadores $M^+_{\mu,d}$ y $M^-_{\mu,d}$ son de tipo fuerte (p, p) con respecto al par de medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Veremos que para cada operador se puede determinar una condición, denotada por $S^+_{p,d}(\mu)$

y $S^-_{p,d}(\mu)$, respectivamente, para la que esto se cumple si y sólo si (u, v) es un par de pesos que verifica esta condición. Por último estudiaremos el problema anterior para el caso de dos pesos iguales, $u = v$, y veremos que, bajo una cierta condición de duplicación en μ, es equivalente a que se verifique la correspondiente condición $A^+_{p,d}(\mu)$ o $A^-_{p,d}(\mu)$.

Estos resultados sobre maximales diádicos laterales nos permitirán desarrollar la teoría de desigualdades con pesos para el operador maximal diádico $M_{\mu,d}$ en $\mathbb{R}$.

Capítulo 1

Operador maximal de Hardy-Littlewood

La función maximal de Hardy-Littlewood en $\mathbb{R}^n$ se define para funciones localmente integrables ($f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$) como

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|dy,$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas B que contienen a x, y $|E|$ es la medida de Lebesgue de un conjunto medible-Lebesgue E. También se puede definir la versión centrada de esta maximal medidante

$$M^c f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy.$$

donde $B(x,r)$ es la bola euclídea centrada en x y de radio r. Se tiene la siguiente relación entre estas funciones maximales, $M^c f \leq Mf$. Estas funciones definen operadores, se puede probar que M y M^c son de tipo débil $(1,1)$, y de tipo fuerte (p,p) para todo $p > 1$ (véase [10]). El tipo débil $(1,1)$ tiene como consecuencia el *Teorema de diferenciación de Lebesgue*. En este capítulo vamos a estudiar estas cuestiones cambiando la medida de Lebesgue por medidas de Borel arbitrarias μ en $\mathbb{R}^n$. Por último, estudiaremos la descomposición de Calderón-Zygmund con respecto a medidas μ verificando una cierta propiedad de duplicación.

1. Preliminares

En esta sección vamos a estudiar dos lemas de recubrimiento que serán usados a lo largo de la memoria, en particular dedicaremos gran parte de la sección a probar el *Lema de recubrimiento de Besicovitch*. También estudiaremos las medidas con la propiedad de duplicación en $\mathbb{R}^n$, esta propiedad la cumple trivialmente la medida de Lebesgue.

1.1. Medidas doblantes

Definición 1.1. Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$. Decimos que μ verifica la propiedad de duplicación (o que μ es doblante) si existe una constante $D(\mu) > 0$, que solo depende de μ, tal que

$$\mu(B(x,3r)) \leq D(\mu)\mu(B(x,r)), \tag{1.1}$$

para todos $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

Notación: Introduciremos algo de notación que usaremos a lo largo del trabajo. Si B es una bola de radio r y α es un número positivo denotamos por αB a la bola con el mismo centro que B y radio igual a αr. Dado un cubo Q con lados paralelos a los ejes coordenados denotaremos por $l(Q)$ al lado de Q. Si $\alpha > 0$, denotaremos por αQ al cubo con el mismo centro que Q y lado $\alpha l(Q)$.

Observación 1.2. En definición anterior hemos tomado la bola dilatada de razón 3, pero podríamos tomar cualquier otra dilatación. Supongamos que μ verifica la propiedad de duplicación, y sea $\alpha > 1$. Vamos a probar que $\mu(B(x, \alpha r)) \leq D(\mu)'\mu(B(x, r))$, para todos $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Si $\alpha \leq 3$ entonces $\mu(B(x, \alpha r)) \leq \mu(B(x, 3r)) \leq D(\mu)\mu(B(x, r))$ para todos $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Por otra parte, si $\alpha > 3$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \leq 3^k$, y por tanto, $\mu(B(x, \alpha r)) \leq \mu(B(x, 3^k r)) \leq D(\mu)^k \mu(B(x, r))$ para todos $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

Vamos a dar un lema de recubrimiento de tipo Vitali para medidas con la propiedad de duplicación.

Lema 1.3. *Sea μ una medida en $\mathbb{R}^n$ que verifica la propiedad de duplicación con constante $D(\mu)$. Entonces dada una colección finita $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_N\}$ de bolas abiertas, podemos extraer una subcolección de $\mathcal{B}$ disjunta, $B_{i_1}, ..., B_{i_k}$ tal que*

$$\mu\left(\bigcup_{l=1}^{N} B_l\right) \leq D(\mu) \sum_{j=1}^{k} \mu(B_{i_j}). \tag{1.2}$$

Demostración: Tomemos como B_{i_1} una bola de radio máximo de $\mathcal{B}$ (puede haber varias), y eliminamos de $\mathcal{B}$ la bola B_{i_1} y todas las que la intersequen. Observemos que todas las bolas eliminadas están contenidas en $3B_{i_1}$. Elegimos, mediante el mismo criterio, una segunda bola de la familia de bolas no eliminadas (si nos quedan bolas). Repitiendo este proceso, a lo sumo N veces, obtenemos una colección disjunta de bolas $B_{i_1}, ..., B_{i_k}$ tal que $\bigcup_{l=1}^{N} B_l \subset \bigcup_{j=1}^{k} 3B_{i_j}$. Además, gracias a la propiedad de duplicación podemos controlar la medida de las dilataciones de la siguiente forma:

$$\mu\left(\bigcup_{l=1}^{N} B_l\right) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} 3B_{i_j}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \mu(3B_{i_j}) \leq D(\mu) \sum_{j=1}^{k} \mu(B_{i_j}).$$

□

Observación 1.4. Si μ cumple la propiedad de duplicación para bolas, entonces también la cumple para cubos, es decir, existe $C > 1$ tal que $\mu(3Q) \leq C\mu(Q)$ para todo cubo Q. Dado un cubo, basta observar que si B es la bola circunscrita en el cubo entonces $B \subset Q \subset 3Q \subset 9B$, y por tanto $\mu(3Q) \leq \mu(9B) \leq (D(\mu))^2\mu(B) \leq (D(\mu))^2\mu(Q)$. Recíprocamente, si μ cumple la propiedad de duplicación para cubos, entonces también la cumple para bolas.

1.2. Lema de recubrimiento de Besicovitch

Cuando tratemos con operadores maximales centrados, usualmente tendremos recubrimientos en los que para cada punto tendremos una bola centrada en ese punto, el siguiente resultado nos permitirá extraer un subrrecubrimiento a lo sumo numerable, en el que los solapamientos estarán controlados. Esto será muy útil a la hora de probar desigualdades de tipo débil para operadores centrados.

Teorema 1.5 (Lema de recubrimiento de Besicovitch, [14]). *Sea A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que asociado a cada $x \in A$ tenemos un $r(x) > 0$, y consideremos el recubrimiento $\mathcal{F} = \{B(x, r(x))\}_{x \in A}$. Entonces podemos elegir una sucesión de bolas $\{B_k\}$ de $\mathcal{F}$ tal que*

1. *$A \subset \bigcup_k B_k$.*
2. *Existe una constante $c_n \in \mathbb{N}$, que sólo depende de n, tal que la sucesión $\{B_k\}$ puede ser distribuida en c_n sucesiones $\{B_k^1\}, ..., \{B_k^{c_n}\}$, donde cada $\{B_k^i\}$ es una familia disjunta de bolas.*

Demostración: Vamos a elegir la sucesión $\{B_k\}$ de la siguiente manera. Si $a_0 = \sup\{r(x) : x \in A\} = \infty$, entonces existe $x \in A$ tal que $r(x) > 2\text{diam}(A)$, luego $A \subset B(x, r(x))$. Supongamos entonces $a_0 < \infty$. Tomemos $x_1 \in A$ tal que $r(x_1) > \frac{3}{4}a_0$, y definimos $B_1 = B(x_1, r(x_1))$. Consideremos ahora $a_1 = \sup\{r(x) : x \in A \setminus B_1\}$, y tomemos $x \in A \setminus B_1$ tal que $r(x_2) > \frac{3}{4}a_1$, y definimos $B_2 = B(x_2, r(x_2))$. Continuando este proceso obtenemos una sucesión $\{B_k\}$, que puede ser finita, o infinita. Si fuera finita, entonces el proceso anterior ha finalizado en un numero finito de pasos, y necesariamente $A \subset \cup_k B_k$. Supongamos ahora que la sucesión $\{B_k\}$ es infinita, y probemos que $r(x_k) \longrightarrow 0$ cuando $k \to \infty$. En primer lugar veamos que la familia $\{\frac{1}{3}B_k\}$ es disjunta dos a dos. Sean $i, j \in \mathbb{N}$, podemos suponer sin perdida de generalidad $i > j$. Entonces por el proceso de selección se verifica $x_i \notin B(x_j, r(x_j))$, y además $r(x_j) > \frac{3}{4}r(x_i)$. Supongamos que existe $x \in \frac{1}{3}B_i \cap \frac{1}{3}B_j$, entonces

$$|x_j - x_i| \leq |x_j - x| + |x_i - x| < \frac{r(x_j)}{3} + \frac{r(x_i)}{3} < \frac{r(x_j)}{3} + \frac{4r(x_j)}{9} = \frac{7r(x_j)}{9} < r(x_j).$$

Es decir, $x_i \in B(x_j, r(x_j))$, lo cual es una contradicción, luego necesariamente la familia $\{\frac{1}{3}B_k\}$ es disjunta. Ahora basta observar que $\bigcup_k \frac{1}{3}B_k \subset \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \leq a_0\}$, que es un conjunto acotado, y por tanto

$$\sum_k \left|\frac{1}{3}B_k\right| = \left|\bigcup_k \frac{1}{3}B_k\right| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \leq a_0\}| < \infty.$$

Luego $\left|\frac{1}{3}B_k\right| \longrightarrow 0$ cuando $k \to \infty$, y como consecuencia $r(x_k) \longrightarrow 0$. Ahora ya podemos completar la prueba del primer apartado, supongamos que existe $x \in A \setminus \bigcup_k B_k$. Asociado a x tenemos $r(x) > 0$, y como $x \in A \setminus \bigcup_k B_k$ tenemos que $r(x_k) > \frac{3}{4}r(x)$, lo que contradice que $r(x_k) \longrightarrow 0$. Luego $A \setminus \bigcup_k B_k = \emptyset$ y por lo tanto la sucesión $\{B_k\}$ recubre al conjunto A.

Sea B_h una bola de la familia $\{B_k\}$, y veamos cuantas bolas B_k con $k < h$ intersecan a B_h. A una bola B_k que interseca a B_h la llamaremos de tipo 1 si $|x_h - x_k| \leq 3r(x_h)$, donde x_k es el centro de B_k. Al resto de bolas las llamaremos de tipo 2, es decir B_k es de tipo 2 si interseca a B_h y además $|x_h - x_k| > 3r(x_h)$. Si una bola es de tipo 1 consideremos la bola $\widetilde{B}_k$ concéntrica con B_k y de radio $\frac{1}{4}r(x_h)$. Para una bola de tipo 2, consideramos el segmento que une x_h y x_k, y en él tomamos el punto x_k^* que está a distancia $3r(x_h)$ de x_h. Consideremos en este caso la bola $\widetilde{B}_k = B(x_k^*, \frac{1}{4}r(x_h))$. De forma similar a la anterior se prueba que la familia $\{\frac{1}{3}\widetilde{B}_k\}$ es disjunta dos a dos, y observemos que todas están contenidas en la bola $B(x_h, 4r(x_h))$. Por tanto, el número de tales bolas es menor o igual que

$$\frac{|B(x_h, 4r(x_h))|}{\left|\frac{1}{3}\widetilde{B}_k\right|} = \frac{v_n(4r(x_h))^n}{v_n\left(\frac{1}{3\cdot 4}r(x_h)\right)^n} = \frac{4^n}{\left(\frac{1}{3}\frac{1}{4}\right)^n} = 3^n 4^{2n} = 48^n = c_n,$$

donde v_n es la medida de Lebesgue de la bola unidad en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, el número de bolas de la familia que intersecan a cada bola es menor que una constante que solo depende de la dimensión, esto nos permite distribuir la sucesión $\{B_k\}$ en a lo sumo $c_n = 48^n$ sucesiones disjuntas de bolas. □

Observación 1.6. Existe una versión del *Lema de recubrimiento de Besicovitch* para cubos, es decir, un resultado análogo para un recubrimiento de cubos centrados $\{Q(x, r(x))\}_{x\in A}$, donde $Q(x, r)$ es el cubo de centro x y lado r. La prueba de este resultado es similar, y puede encontrarse en [13].

2. Función maximal de Hardy-Littlewood asociada a una medida de Borel

Decimos que una medida de Borel μ es regular si verifica para todo conjunto medible Borel E las dos siguientes propiedades:

- $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}$,
- $\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(G) : E \subset G,\ G \text{ abierto}\}$.

En [37] se prueba que si μ es una medida en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos ($\mu(K) < \infty$ para todo compacto K), entonces μ es una medida regular. En esta memoria vamos a trabajar con medidas de Borel μ en $\mathbb{R}^n$ finitas sobre conjuntos compactos, que son una clase de medidas muy generales.

Definición 1.7. Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre compactos y $f \in L^1_{loc}(\mu)$. Definimos la función maximal de Hardy-Littlewood de f con respecto a la medida μ como

$$M_\mu f(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)|d\mu(y),$$

donde el supremo se está tomando sobre todas las bolas abiertas B tales que $x \in B$. También definimos la maximal centrada como

$$M^c_\mu f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|d\mu(y).$$

En los supremos anteriores, entendemos que si $\mu(B) = 0$ para alguna bola B, entonces el promedio asociado a B es 0. También podemos definir los operadores $\widetilde{M_\mu}$ y $\widetilde{M^c_\mu}$ análogos a los anteriores pero tomando cubos y cubos centrados en x en lugar de bolas.

Nota 1.8. Cuando la medida μ venga dada por una densidad con respecto a la medida de Lebesgue, es decir, $d\mu(x) = w(x)dx$, escribiremos M_w en vez de M_μ.

Proposición 1.9. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Entonces los operadores M_μ y M^c_μ son puntualmente equivalentes, es decir, para toda $f \in L^1_{loc}(\mu)$ se verifica,*

$$M^c_\mu f(x) \le M_\mu f(x) \le D(\mu) M^c_\mu f(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración: La primera desigualdad es elemental, ya que el conjunto sobre el que se está tomando supremo en la definición de M_μ contiene al de M_μ^c. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y B una bola con $x \in B$, entonces existe $r > 0$ tal que $B \subset B(x,r) \subset 3B$. Entonces por la propiedad de duplicación tenemos, $\mu(B) \leq \mu(B(x,r)) \leq \mu(3B) \leq D(\mu)\mu(B)$, y por tanto,

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y) \leq \frac{D(\mu)}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| d\mu(y) \leq D(\mu) M_\mu^c f(x),$$

y tomando supremo sobre todas las bolas que contienen a x en la desigualdad anterior, obtenemos $M_\mu f(x) \leq D(\mu) M_\mu^c f(x)$. □

En primer lugar, vamos a probar que si μ tiene la propiedad de duplicación, entonces estos operadores son de tipo débil $(1,1)$, ya que podemos seguir la misma demostración que se hace para los operadores maximales de Hardy-Littlewood clásicos M y M^c. Observemos que si probamos que M_μ es de tipo débil $(1,1)$, entonces M_μ^c también lo será, ya que por la Proposición 1.9, para cada $\lambda > 0$ tenemos la siguiente inclusión

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu^c f(x) > \lambda\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(x) > \lambda\}.$$

Teorema 1.10. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Entonces M_μ y M_μ^c son de tipo débil $(1,1)$. Concretamente, para cada $f \in L^1(\mu)$ se verifica*

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu^c f(x) > \lambda\}\right) \leq \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{D(\mu)}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d\mu(x),$$

para todo $\lambda > 0$.

Demostración: En vista de la observación anterior solo es necesario probar que M_μ es de tipo débil $(1,1)$. Sea $f \in L^1(\mu)$. Para cada $\lambda > 0$ definimos el conjunto $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(x) > \lambda\}$. Dado $x \in E_\lambda$ existe una bola B_x tal que $x \in B_x$ y además se verifica

$$\mu(B_x) < \frac{1}{\lambda} \int_{B_x} |f(y)| d\mu(y). \tag{1.3}$$

Sea $K \subset E_\lambda$ compacto, podemos suponer $K \neq \emptyset$ ya que en otro caso la desigualdad que vamos a probar es obvia. La familia $\{B_x\}_{x \in K}$ recubre a K. Por la compacidad de K, podemos extraer un subrrecubrimiento finito $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_N\}$. Observemos que $\mathcal{B}$ está en las condiciones del Lema 1.3, luego existe una subcolección de bolas $\{B_{i_1}, ..., B_{i_k}\}$ disjuntas y verificando la relación

$$\mu\left(\bigcup_{l=1}^N B_l\right) \leq D(\mu) \sum_{j=1}^k \mu(B_{i_j}),$$

donde $D(\mu)$ es la constante de la propiedad de duplicación de μ. Utilizando esto y (1.3) tenemos

$$\begin{aligned} \mu(K) \leq & \mu\left(\bigcup_{l=1}^N B_l\right) \leq D(\mu) \sum_{j=1}^k \mu(B_{i_j}) < \sum_{j=1}^k \frac{D(\mu)}{\lambda} \int_{B_{i_j}} |f(y)| d\mu(y) \\ = & \frac{D(\mu)}{\lambda} \int_{\bigcup_{j=1}^k B_{i_j}} |f(y)| d\mu(y) \leq \frac{D(\mu)}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| d\mu(y). \end{aligned}$$

De la regularidad de μ se deduce la desigualdad de tipo débil $(1,1)$ siguiente:

$$\mu(E_\lambda) \leq \frac{D(\mu)}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d\mu(x).$$

□

Trivialmente M_μ y M_μ^c son tipo fuerte (∞, ∞), y por tanto mediante el *Teorema de interpolación de Marcinkiewicz* obtenemos que son de tipo fuerte (p,p) para todo $p > 1$.

Corolario 1.11. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Entonces M_μ y M_μ^c son de tipo fuerte (p,p) para todo $p > 1$.*

Si prescindimos de la propiedad de duplicación, entonces como M_μ^c es un operador más pequeño, podría suceder que M_μ no fuera de tipo débil $(1,1)$ y sin embargo, M_μ^c lo fuera. Estudiemos ahora la acotación de estos operadores sin la propiedad de duplicación. En primer lugar, haciendo uso del Lema de recubrimiento de Besicovitch podemos probar que M_μ^c es de tipo débil $(1,1)$.

Teorema 1.12. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos. Entonces M_μ^c es de tipo débil $(1,1)$, es decir, existe $C > 0$ tal que para toda $f \in L^1(\mu)$ se verifica*

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu^c f(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d\mu(x),$$

para todo $\lambda > 0$.

Demostración: Sea $f \in L^1(\mu)$. Para $\lambda > 0$ definimos el conjunto $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu^c f(x) > \lambda\}$. Entonces, para cada $x \in E_\lambda$ existe un $r_x > 0$ tal que

$$\mu(B(x, r_x)) < \frac{1}{\lambda} \int_{B(x,r_x)} |f(y)| d\mu(y). \tag{1.4}$$

Sea $K \subset E_\lambda$ compacto, y consideremos a familia $\mathcal{F} = \{B(x, r_x)\}_{x \in K}$. Observemos que K y $\mathcal{F}$ están en las condiciones del Lema 1.5, ya que K es acotado y las bolas están centradas en cada punto. Entonces existen $A_1, ..., A_{c_n}$ familias formadas por bolas disjuntas cuya unión cubre todo K, donde c_n es la constante dada por el *Lema de Besicovitch*. Luego, usando que cada familia A_j es disjunta y (1.4) tenemos,

$$\begin{aligned}
\mu(K) \leq & \mu\left(\bigcup_{j=1}^{c_n} \bigcup_{B \in A_j} B\right) \leq \sum_{j=1}^{c_n} \mu\left(\bigcup_{B \in A_j} B\right) = \sum_{j=1}^{c_n} \sum_{B \in A_j} \mu(B) \\
\leq & \sum_{j=1}^{c_n} \sum_{B \in A_j} \frac{1}{\lambda} \int_B |f(y)| d\mu(y) = \sum_{j=1}^{c_n} \frac{1}{\lambda} \int_{\bigcup_{B \in A_j} B} |f(y)| d\mu(y) \\
\leq & \sum_{j=1}^{c_n} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| d\mu(y) = \frac{c_n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| d\mu(y).
\end{aligned}$$

Aplicando la regularidad de μ obtenemos la desigualdad de tipo débil $(1,1)$,

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu^c f(x) > \lambda\}) \leq \frac{c_n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| d\mu(y),$$

para cada $\lambda > 0$. $\square$

Como consecuencia, mediante una interpolación obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.13. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y $p > 1$. Entonces M_μ^c es de tipo fuerte (p,p), con constante que solo depende de p y n.*

Observación 1.14. En vista de las observaciones 1.4 y 1.6, resultados anteriores son ciertos para las maximales con cubos $\widetilde{M}_\mu$ y $\widetilde{M}_\mu^c$. Es decir, para toda medida de Borel μ finita sobre conjuntos compactos tenemos que el operador $\widetilde{M}_\mu^c$ es de tipo débil $(1,1)$ y tipo fuerte (p,p) para $p > 1$. Y, si μ tiene la propiedad de duplicación entonces $\widetilde{M}_\mu$ es de tipo débil $(1,1)$ y tipo fuerte (p,p) para $p > 1$.

Sin embargo, en general, M_μ no es de tipo débil $(1,1)$. En 1983, *P. Sjögren* probó en [33] que M_μ es de tipo débil $(1,1)$ si $n = 1$. Para $n = 2$ se pueden dar ejemplos en los que M_μ no aplica $L^1(\mu)$ en $L^{1,\infty}(\mu)$. Vamos a dedicar el resto de esta sección a dar ejemplos, en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, para los que M_μ no es de tipo débil $(1,1)$. En la siguiente sección estudiaremos el caso $n = 1$. A lo largo de estos ejemplos C representará una constante positiva, pudiendo ser distinta en cada linea en la que aparezca. Estudiemos en primer lugar los dos ejemplos de [33].

Ejemplo 1. *Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la medida $d\mu(x,y) = e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}dxdy$. Vamos a ver que existe una función f tal que $M_\mu f$ no verifica la desigualdad de tipo débil $(1,1)$.*

Consideremos la medida $\lambda(E) = \begin{cases} 1 & si\ (0,a+1) \in E \\ 0 & si\ (0,a+1) \notin E \end{cases}$, para $a > 0$ grande, es decir, λ es la delta de Dirac en el punto $(0,a+1)$. Por simplicidad en la notación, denotaremos $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$. Sea $K = \frac{1}{|B(0,1)|}\chi_{B(0,1)}$, y consideremos la aproximación de la identidad asociada $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. Vamos a probar que para cada bola B se tiene

$$\frac{1}{2}\lambda(B) \leq \int_B K_\varepsilon * \lambda(x)dx, \tag{1.5}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Podemos suponer que $\lambda(B) > 0$. Aplicando el teorema de Tonelli y que cada K_ε es par tenemos,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} (K_\varepsilon * \lambda)(x)\chi_B(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} K_\varepsilon(x-y)d\lambda(y) \right) \chi_B(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} K_\varepsilon(x-y)\chi_B(x)dx \right) d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} K_\varepsilon(y-x)\chi_B(x)dx \right) d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (K_\varepsilon * \chi_B)(y)d\lambda(y) \\
&\geq \int_B (K_\varepsilon * \chi_B)(y)d\lambda(y) \\
&= \int_B \left(\frac{1}{|B(0,\varepsilon)|} \int_{B(y,\varepsilon)} \chi_B(x)dx \right) d\lambda(y).
\end{aligned}$$

Ahora observemos que si $y \in B$, entonces $B(y,\varepsilon) \subset B$ para ε pequeño, y por tanto, $K_\varepsilon * \chi_B(y) = 1$. Entonces, aplicando el Teorema de la convergencia dominada concluimos,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_B (K_\varepsilon * \lambda)(x)dx &\geq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_B (K_\varepsilon * \chi_B)(y)d\lambda(y) = \int_B \lim_{\varepsilon\to 0^+}(K_\varepsilon * \chi_B)(y)d\lambda(y)\\ &= \int_B d\lambda(y) = \lambda(B).\end{aligned}$$

Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_B (K_\varepsilon * \chi_B)(y)d\lambda(y) \geq \frac{1}{2}\lambda(B).$$

Vamos a usar que para x grande se tiene la siguiente estimación,

$$\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt \sim \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{1.6}$$

cuya prueba haremos al final del ejemplo. Para cada $s \in (-1,1)$ consideremos la bola $B_s := B((s,a+1),1)$, y observemos que $B_0 \subset \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq a + \frac{x^2}{2}\right\}$ (lo cual también probaremos al final). Entonces usando (1.6) tenemos que para cada $s \in (-1,1)$,

$$\begin{aligned}\mu(B_s) &= \iint_{B_s} d\mu(x,y) = \iint_{B((s,a+1),1)} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy\\ &= \iint_{B((0,a+1),1)} e^{-\frac{(x+s)^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy \leq \iint_{B((0,a+1),1)} e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy\\ &\leq \int_{-1}^1\left(\int_{a+\frac{x^2}{2}}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)dx \leq C\int_{-1}^1 \frac{1}{a+\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{1}{2}(a+\frac{x^2}{2})^2}dx\\ &\leq \frac{C}{a}\int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{2}(a^2+ax^2+\frac{x^4}{4})}dx \leq \frac{C}{a}e^{-\frac{a^2}{2}}\int_{-1}^1 e^{-a\frac{x^2}{2}}dx\\ &= \frac{C}{a}e^{-\frac{a^2}{2}}\int_{-1}^1 e^{-\frac{(\sqrt{a}x)^2}{2}}dx = \frac{C}{a\sqrt{a}}e^{-\frac{a^2}{2}}\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\ &\leq \frac{C}{a\sqrt{a}}e^{-\frac{a^2}{2}}.\end{aligned}$$

Observemos que para cada B_s tenemos que $\lambda(B_s) \leq 2\int_{B_s} K_\varepsilon * \lambda(x)dx$. Consideremos ahora el conjunto $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, a < y < a+2\}$. Si definimos $f(x,y) = (K_\varepsilon * \lambda)(x,y)e^{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}}$, entonces para cada $(x,y) \in Q$ se tiene

$$\begin{aligned}Ca\sqrt{a}e^{\frac{a^2}{2}} &\leq \frac{\lambda(B_x)}{\mu(B_x)} \leq \frac{2}{\mu(B_x)}\int_{B_x}(K_\varepsilon * \lambda)(x,y)dxdy\\ &= \frac{2}{\mu(B_x)}\int_{B_x} f(x,y)d\mu(x,y) \leq 2M_\mu f(x,y).\end{aligned}$$

Entonces, si suponemos que $M_\mu f$ verifica la desigualdad de tipo débil $(1,1)$ tenemos,

$$\begin{aligned}\mu(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : M_\mu f(x,y) > Ca\sqrt{a}e^{\frac{a^2}{2}}\}) \leq & \frac{C}{a\sqrt{a}e^{\frac{a^2}{2}}}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d\mu(x,y)\\ = & \frac{C}{a\sqrt{a}e^{\frac{a^2}{2}}}\int_{\mathbb{R}^2}(K_\varepsilon * \lambda)(x,y)dxdy\\ \leq & \frac{C}{a\sqrt{a}e^{\frac{a^2}{2}}}\|K_\varepsilon\|_1\,\lambda(\mathbb{R}^2)\\ = & \frac{C}{a\sqrt{a}e^{\frac{a^2}{2}}}.\end{aligned}$$

Y como $Q\subset\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : M_\mu\lambda(x,y) > Ca\sqrt{a}e^{\frac{a^2}{2}}\}$, tenemos que

$$\frac{C}{a}e^{-\frac{a^2}{2}} \leq \mu(Q) \leq \mu(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : M_\mu f(x,y) > Ca\sqrt{a}e^{\frac{a^2}{2}}) \leq \frac{C}{a\sqrt{a}e^{\frac{a^2}{2}}},$$

y esto implica $\sqrt{a}\leq C$. Tomando a suficientemente grande llegamos a una contradicción, y por tanto M_μ no es de tipo débil $(1,1)$.
Probemos ahora la estimación (1.6), vamos a seguir la prueba de [25]. Para cada $a>0$ tenemos,

$$\begin{aligned}\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx \leq \int_a^\infty \frac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{a}e^{-\frac{a^2}{2}} = & \int_a^\infty\left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\ \leq \left(1+\frac{1}{a^2}\right)\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx = & \frac{a^2+1}{a^2}\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx.\end{aligned}$$

Entonces para todo $a>0$ tenemos $\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx \leq \frac{1}{a}e^{-\frac{a^2}{2}}$ y $\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx \geq \frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}$. Luego, para a suficientemente grande existe $C>0$ tal que $\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx \geq \frac{C}{a}e^{-\frac{a^2}{2}}$, y esto concluye la prueba de (1.6).

Probemos por último la inclusión $B_0 \subset \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq a+\frac{x^2}{2}\right\}$. Para ello veremos que todo punto de la frontera de B_0 queda por encima de la parabola $y=a+\frac{x^2}{2}$. Sea $(x,y)\in\partial B_0$, es decir, verificando $x^2+(y-(a+1))^2=1$. Basta probarlo para los (x,y) tal que $y=a+1-\sqrt{1-x^2}$ con $x\in(-1,1)$. Entonces observemos que $(x,y)\in\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq a+\frac{x^2}{2}\right\}$ es equivalente a que se verifique $a+1-\sqrt{1-x^2}\geq a+\frac{x^2}{2}$ para todo $x\in(-1,1)$. A su vez, esto es equivalente a $1-x^2\leq 1-x^2+\frac{x^4}{4}$ para todo $x\in(-1,1)$, es decir, $x^4\geq 0$ para todo $x\in(-1,1)$ lo cual es trivialmente cierto, y por tanto hemos concluido la prueba.

Podemos dar el mismo ejemplo para la maximal $\widetilde{M_\mu}$ con cubos.

Ejemplo 2. *Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la medida $d\mu(x,y)=e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}dxdy$, e igualmente que en el ejemplo anterior consideremos la medida $\lambda(E)=\begin{cases}1 & si\ (a,a)\in E\\ 0 & si\ (a,a)\notin E\end{cases}$, para $a>0$ grande, es decir, λ es la delta de Dirac en (a,a). De forma análoga al ejemplo anterior se obtiene que existe $\varepsilon>0$ tal que*

$$\frac{1}{2}\lambda(Q) \leq \int_Q K_\varepsilon * \lambda(x,y)dxdy,$$

para cada cubo Q. Tomemos $f(x,y) = (K_\varepsilon * \lambda)(x,y)e^{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}}$, y veamos que $\widetilde{M}_\mu f$ no verifica la desigualdad de tipo débil $(1,1)$. Sea $Q_{s,t}$ un cubo con vértice inferior derecho $(a-s, a-t)$ con $s,t>0$ y $s+t=1$, es decir $Q_{s,t} = (a-s, a-s+h)\times(a-t, a-t+h)$ para un cierto $h>0$. Estimemos la medida de dichos cubos usando (1.6),

$$\begin{aligned}
\mu(Q_{s,t}) &= \int_{Q_{s,t}} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy = \left(\int_{a-s}^{a-s+h} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)\left(\int_{a-t}^{a-t+h} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)\\
&\leq \left(\int_{a-s}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)\left(\int_{a-t}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right) \leq C\frac{1}{a-s}e^{-\frac{(a-s)^2}{2}}\frac{1}{a-t}e^{-\frac{(a-t)^2}{2}}\\
&= C\frac{1}{a^2-a(t+s)+st}e^{-\frac{1}{2}(a^2-2as+s^2+a^2-2at+t^2)}\\
&= C\frac{1}{a^2-a+st}e^{-\frac{1}{2}(2a^2-2a+s^2+t^2)} \leq C\frac{1}{a^2-a}e^{-a^2+a}\\
&\leq C\frac{1}{a^2}e^{-a^2+a}.
\end{aligned}$$

Sea $\mathcal{Q}$ la unión de todos los cubos $Q_{s,t}$ con $t,s>0$ y $s+t=1$, es decir

$$\mathcal{Q} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a-1<x\leq a, 2a-1-x<y\}\cup(a,\infty)\times(a-1,\infty).$$

Para cada $(x,y)\in Q$ existe un cubo $Q_{s,t}$ tal que $(x,y)\in Q_{s,t}$ y $(a,a)\in Q_{s,t}$, por tanto,

$$\begin{aligned}
Ca^2e^{a^2-a} &\leq \frac{\lambda(Q_{s,t})}{\mu(Q_{s,t})} \leq \frac{2}{\mu(Q_{s,t})}\int_{Q_{s,t}} K_\varepsilon * \lambda(x,y)dxdy\\
&= \frac{2}{\mu(Q_{s,t})}\int_{Q_{s,t}} f(x,y)d\mu(x,y) \leq 2\widetilde{M}_\mu f(x,y).
\end{aligned}$$

Ahora acotemos inferiormente la medida de Q. Sea $\rho_a = \sqrt{a^2+(a-1)^2}$, y consideremos la región

$$R_a = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>\rho_a^2\}\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{a-1}{a}x<y<\frac{a}{a-1}x\right\},$$

que puede verse en la Figura 1.1. Entonces tenemos $R_a\subset Q$, y por tanto $\mu(R_a)\leq\mu(Q)$. Sean α y β tales que $\tan\alpha = \frac{a-1}{a}$, y $\tan\beta = \frac{a}{a-1}$, entonces integrando en coordenadas polares tenemos,

$$\begin{aligned}
\mu(R_a) &= \int_\alpha^\beta\left(\int_{\rho_a}^\infty \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}}d\rho\right)d\varphi = (\beta-\alpha)e^{-\frac{\rho_a^2}{2}}\\
&= (\beta-\alpha)e^{-\frac{a^2+(a-1)^2}{2}} = (\beta-\alpha)e^{-\frac{1}{2}}e^{-a^2+a}.
\end{aligned}$$

Ahora observemos que

$$\tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a-1}-\frac{a-1}{a}\right) = \frac{2a-1}{2a(a-1)},$$

y por tanto, para a grande tenemos $\tan(\beta-\alpha)\sim\frac{1}{a}$. Entonces $\tan(\beta-\alpha)\to 0$ cuando $a\to\infty$, y por tanto $\beta-\alpha\to 0$. Luego, para a suficientemente grande tenemos $\beta-\alpha>\frac{1}{2a}$, y esto nos permite estimar la expresión de $\mu(R_a)$,

$$\mu(Q)\geq\mu(R_a) = (\beta-\alpha)e^{-\frac{1}{2}}e^{-a^2+a} > \frac{C}{a}e^{-a^2+a}$$

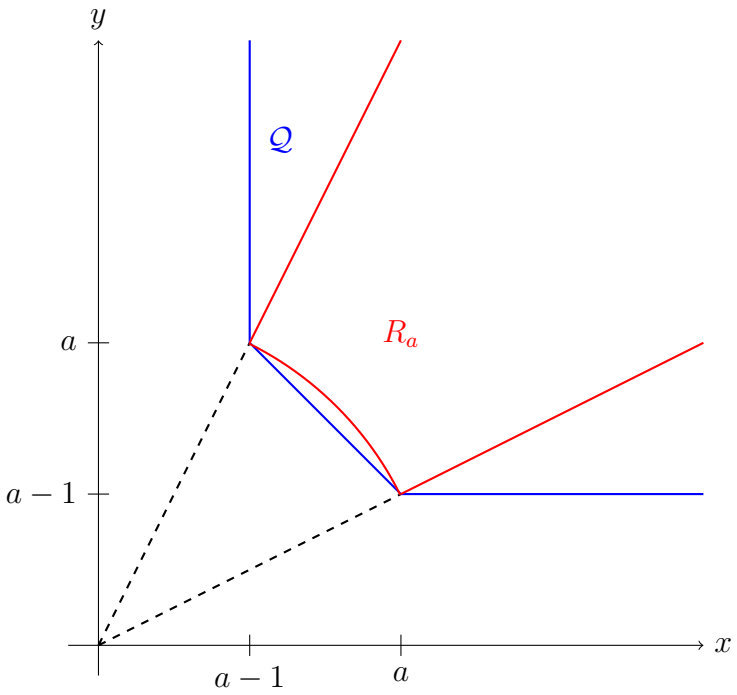


Figura 1.1: La región delimitada por las lineas azules es el conjunto $\mathcal{Q}$, mientras que la delimitada por las lineas rojas es R_a.

Entonces, si $\widetilde{M}_\mu f$ *verifica la desigualdad de tipo débil* $(1,1)$ *tenemos,*

$$\begin{aligned}\frac{C}{a}e^{-a^2+a} \leq & \mu(Q) \leq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \widetilde{M}_\mu f(x,y) > Ca^2e^{a^2-a}\} \\ \leq & \frac{C}{a^2e^{a^2-a}} \|f\|_1 \leq \frac{C}{a^2e^{a^2-a}}.\end{aligned}$$

Y esto implica $a \leq C$*, tomando* a *suficientemente grande llegamos a contradicción. Por tanto, para la medida* μ *considerada, el operador maximal* $\widetilde{M}_\mu$ *con cubos no es de tipo débil* $(1,1)$*.*

Ahora que hemos dado ejemplos en los que M_μ no es de tipo débil $(1,1)$ nos podemos plantear si M_μ es de tipo fuerte (p,p) para algún $p > 1$. El ejemplo 1 anterior es muy interesante ya que se puede probar que el operador M_μ con la medida $d\mu(x,y) = e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}dxdy$ es de tipo fuerte (p,p) para todo $p > 1$ (véase [8]). Sin embargo, en general esto no es cierto; para verlo vamos a dar un ejemplo en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, publicado en 1998 por *Grafakos, L. y Kinnunen, J.* [11]. Probaremos que en general M_μ no es acotado en $L^p(\mu)$ para $1 < p < \infty$. Por tanto, tampoco es de tipo débil $(1,1)$, ya que si lo fuera mediante una interpolación podríamos obtener el tipo fuerte (p,p).

Teorema 1.15. *Si* $n \geq 2$*, el operador maximal* M_μ *no es acotado en* $L^p(\mu)$ *para* $1 < p < \infty$*.*

Demostración: Sea $n \geq 2$ y $1 < p < \infty$. Seleccionemos una sucesión de bolas cerradas $\{B_i\}_{i=1}^\infty$, tal que $0 \in \partial B_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y además, para cada i existe un punto $x_i \in B_i \setminus \cup_{j \neq i} B_j$. La existencia de esta sucesión está asegurada en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, ya que basta tomar una sucesión de puntos distintos $\{x_i\}$ con norma 2, y considerar la sucesión de

bolas cerradas $\{\overline{B}(\frac{1}{2}x_i, 1)\}$, que cumple las condiciones deseadas. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la medida

$$\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{x_i},$$

donde $x_0 = 0$, y δ_{x_i} es la medida de Dirac con masa en el conjunto $\{x_i\}$. Tomemos ahora $f = \chi_{B_1}$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^p d\mu = \mu(B_1) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{x_i}(B_1) = 2.$$

Luego, $\|f\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$. Además, para cada $i = 1, 2, ...$ tenemos

$$M_\mu f(x_i) \geq \frac{1}{\mu(B_i)} \int_{B_i} f d\mu = \frac{1}{2} \int_{B_i} \chi_{B_1} d\mu = \frac{1}{2}\mu(B_i \cap B_1) \geq \frac{1}{2}.$$

Entonces, utilizando la estimación anterior concluimos

$$\begin{aligned} \|M_\mu f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} (M_\mu f)^p d\mu = \int_{\bigcup_i \{x_i\}} (M_\mu f)^p d\mu \\ \geq \frac{1}{2}\mu\left(\bigcup_i \{x_i\}\right) = \infty. \end{aligned}$$

Luego, M_μ no es de tipo fuerte (p, p). □

Observación 1.16. En $\mathbb{R}$ no se puede tomar una familia de bolas cerradas con esas características. Consideremos una familia $\mathcal{B}$ de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ con $0 \in \partial I$ para cada intervalo I. Sea $\{I_j\}$ una sucesión de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ con $0 \in \partial I_j$ para todo j. Supongamos que hay infinitos intervalos $I_j \subset [0, \infty)$, en caso contrario haríamos el siguiente argumento con los infinitos intervalos contenidos en $(-\infty, 0]$, y sea $\mathcal{B}^+$ el conjunto formado por dichos intervalos. Sea $I_k \in \mathcal{B}^+$ tal que $|I_k| < \frac{1}{2}\sup_{I \in \mathcal{B}^+} |I|$, entonces $I_k \setminus \cup_{j \neq k} I_j = \emptyset$, ya que existe al menos un intervalo $I \in \mathcal{B}^+$ con $|I| > |I_k|$, y por tanto $I_k \subset I$.

3. Funciones maximales laterales

En esta sección vamos a probar que para $n = 1$, M_μ es de tipo débil $(1, 1)$. Vamos a dar una demostración siguiendo la idea de *A. Bernal* ([2]), en la que se hacen uso de las funciones maximales laterales. En lo que sigue, μ es una medida de Borel sobre $\mathbb{R}$ finita sobre compactos o, equivalentemente, finita sobre cada intervalo acotado.

Definición 1.17. Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos compactos. Dada una función $f \in L^1_{loc}(\mu)$, definimos la función maximal de Hardy-Littlewood lateral a la derecha con respecto a la medida μ como

$$M^+_\mu f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{\mu([x, x+h))} \int_{[x,x+h)} |f(y)|\, d\mu(y),$$

donde consideramos el cociente como 0 si $\mu([x, x+h)) = 0$. Análogamente se define la maximal lateral a la izquierda con respecto a la medida μ,

$$M^-_\mu f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{\mu((x-h, x])} \int_{(x-h,x]} |f(y)|\, d\mu(y),$$

donde consideramos el cociente como 0 si $\mu((x-h, x]) = 0$.

Vamos a probar que el operador M_μ^+ es de tipo débil $(1,1)$ con constante 1, para ello adaptaremos a medidas de Borel una demostración que puede encontrarse en [16].

Teorema 1.18. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos compactos. Entonces M_μ^+ es de tipo débil $(1,1)$ con constante 1, es decir, para cada $f \in L^1(\mu)$ se tiene*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} : M_\mu^+ f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x),$$

para todo $\lambda > 0$.

Demostración: Sean $f \in L^1(\mu)$, y $\lambda > 0$. Definimos el conjunto

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R} : M_\mu^+ f(x) > \lambda\}.$$

Podemos descomponer el conjunto E_λ en sus componentes conexas que son intervalos en $\mathbb{R}$. Como para c fijo, la aplicación $x \mapsto \frac{1}{\mu([x,c))} \int_{[x,c)} |f|\, d\mu$ es continua por la izquierda en cada $x_0 < c$ con $\mu([x_0, c)) > 0$, en la descomposición anterior los intervalos son de la forma (a,b) o $(a,b]$. Entonces podemos escribir, $E_\lambda = \bigcup_{n=1}^\infty (a_n, b_n\}$, donde la notación $(a_n, b_n\}$ indica, según el caso, el intervalo (a_n, b_n) o el $(a_n, b_n]$.
Para cada intervalo $(a_n, b_n\}$ vamos a probar la siguiente desigualdad,

$$\lambda \mu((a_n, b_n\}) \leq \int_{(a_n, b_n\}} |f| d\mu. \tag{1.7}$$

Una vez probada habremos terminado, ya que la desigualdad de tipo débil $(1,1)$ se obtiene de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
\mu(E_\lambda) =& \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty (a_n, b_n\}\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu((a_n, b_n\}) \\
\leq& \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda} \int_{(a_n, b_n\}} |f| d\mu = \frac{1}{\lambda} \int_{\bigcup_n (a_n, b_n\}} |f| d\mu \\
=& \frac{1}{\lambda} \int_{E_\lambda} |f| d\mu \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f| d\mu.
\end{aligned}$$

Sea I uno de esos intervalos. Supongamos en primer lugar $I = (a,b)$, fijemos $x \in I$, y definamos el conjunto

$$\Theta_x = \left\{ c : x < c \leq b \text{ y } \frac{1}{\mu([x,c))} \int_{[x,c)} |f| d\mu > \lambda \right\}.$$

Veamos en primer lugar que $\Theta_x \neq \emptyset$. Como $x \in E_\lambda$, entonces existe $c > x$ tal que $\frac{1}{\mu([x,c))} \int_{[x,c)} |f| d\mu > \lambda$. Podemos suponer $b < \infty$, ya que en otro caso trivialmente $c \in \Theta_x$. Si $c \leq b$, entonces $c \in \Theta_x$. Supongamos ahora $c > b$; si $\Theta_x = \emptyset$ entonces $\frac{1}{\mu([x,b))} \int_{[x,b)} |f| d\mu \leq \lambda$. Restando estas expresiones obtenemos

$$\lambda \mu([b,c)) = \lambda(\mu([x,c)) - \mu([x,b))) < \int_{[x,c)} |f| d\mu - \int_{[x,b)} |f| d\mu = \int_{[b,c)} |f| d\mu.$$

Luego $b \in E_\lambda$, lo cual es una contradicción. Hemos probado entonces que $\Theta_x \neq \emptyset$ para todo $x \in I$.

En primer lugar tratemos el caso $b = \infty$ y veamos que Θ_x no está acotado superiormente. Supongamos que está acotado superiormente, y tomemos $\alpha = \sup \Theta_x \in \mathbb{R}$. Entonces existe $\{c_n\} \subset \Theta_x$ tal que $c_n \uparrow \alpha$. Como para cada n se tiene que $c_n \in \Theta_x$, entonces $\frac{1}{\mu([x,c_n))} \int_{[x,c_n)} |f| d\mu > \lambda$. Tomando límite cuando $n \to \infty$ obtenemos,

$$\frac{1}{\mu([x,\alpha))} \int_{[x,\alpha)} |f| d\mu \geq \lambda.$$

Como $\alpha > x$, entonces $\alpha \in E_\lambda$, luego existe $c_\alpha > \alpha$ tal que $\frac{1}{\mu([\alpha,c_\alpha))} \int_{[\alpha,c_\alpha)} |f| d\mu > \lambda$. Sumando estas expresiones obtenemos,

$$\frac{1}{\mu([x,c_\alpha))} \int_{[x,c_\alpha)} |f| d\mu > \lambda.$$

Luego tenemos que $c_\alpha \in \Theta_x$ y $c_\alpha > \alpha = \sup \Theta_x$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, necesariamente Θ_x no está acotado superiormente. Luego $\sup \Theta_x = \infty$, y por lo tanto existe una sucesión $\{c_n\} \subset \Theta_x$, con $c_n \uparrow \infty$. Como para cada n tenemos $c_n \in \Theta_x$, entonces $\frac{1}{\mu([x,c_n))} \int_{[x,c_n)} |f| d\mu > \lambda$. Tomando límite cuando $n \to \infty$ obtenemos,

$$\lambda \mu([x,\infty)) \leq \int_{[x,\infty)} |f| d\mu,$$

para cada $x \in (a,\infty)$. Ahora, tomando límite cuando $x \downarrow a$, tenemos

$$\lambda \mu((a,\infty)) \leq \int_{(a,\infty)} |f| d\mu.$$

Supongamos ahora $b < \infty$. Sea $\alpha = \sup \Theta_x$, entonces por un argumento de límites obtenemos

$$\frac{1}{\mu([x,\alpha))} \int_{[x,\alpha)} |f| d\mu \geq \lambda.$$

Si $\alpha < b$, entonces como $\Theta_\alpha \neq \emptyset$, existe $c \in (\alpha, b]$ con $\frac{1}{\mu([\alpha,c))} \int_{[\alpha,c)} |f| d\mu > \lambda$. Sumando estas últimas expresiones obtenemos $\frac{1}{\mu([x,c))} \int_{[x,c)} |f| d\mu > \lambda$, pero esto es una contradicción, pues hemos probado que $c \in \Theta_x$, y $c > \alpha = \sup \Theta_x$. Luego necesariamente $\alpha = b$, y por tanto tenemos

$$\frac{1}{\mu([x,b))} \int_{[x,b)} |f| d\mu \geq \lambda,$$

para todo $x \in (a,b)$. Tomando límite cuando $x \downarrow a$ obtenemos

$$\frac{1}{\mu((a,b))} \int_{(a,b)} |f| d\mu \geq \lambda. \tag{1.8}$$

Supongamos ahora $I = (a,b]$. Por la descomposición de E_λ tenemos que existe una sucesión $\{b_n\}$ con $b_n \notin E_\lambda$ y $b_n \downarrow b$. Entonces para todo $c > b$ se verifica $\int_{[b_n,c)} |f| d\mu \leq \lambda \mu([b_n,c))$. Tomando límite cuando $n \to \infty$ en la expresión anterior obtenemos

$$\int_{(b,c)} |f| d\mu \leq \lambda \mu((b,c)). \tag{1.9}$$

Por otra parte, para $x \in (a,b]$, existe $c > x$ tal que

$$\int_{[x,c)} |f|d\mu > \lambda\mu([x,c)). \tag{1.10}$$

Podemos suponer $c > b$, ya que en otro caso tendríamos

$$c_0 = \sup\left\{c > x : \int_{[x,c)} |f|d\mu > \lambda\mu([x,c))\right\} \leq b.$$

Y como $c_0 \in (a,b] \subset E_\lambda$, existe $c_1 > c_0$ tal que

$$\int_{[c_0,c_1)} |f|d\mu > \lambda\mu([c_0,c_1)).$$

Entonces, sumando esta expresión con (1.10) obtenemos

$$\int_{[x,c_1)} |f|d\mu = \int_{[x,c_0)} |f|d\mu + \int_{[c_0,c_1)} |f|d\mu > \lambda\mu([x,c_0)) + \lambda\mu([c_0,c_1)) = \lambda\mu([x,c_1)),$$

lo que contradice la definición de c_0. Luego $c > b$, y le podemos restar (1.9) a (1.10), y obtenemos

$$\lambda\mu([x,b]) = \lambda\mu([x,c)) - \lambda\mu((b,c)) < \int_{[x,c)} |f|d\mu - \int_{(b,c)} |f|d\mu = \int_{[x,b]} |f|d\mu,$$

para cada $x \in (a,b)$. Tomando límite cuando $x \downarrow a$, entonces

$$\lambda\mu((a,b]) \leq \int_{(a,b]} |f|d\mu. \tag{1.11}$$

Luego hemos probado (1.7) para todo intervalo de la descomposición de E_λ, y esto concluye la prueba.

□

Análogamente se prueba que M_μ^- es de tipo débil $(1,1)$.

Teorema 1.19. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos compactos. Entonces M_μ^- es de tipo débil $(1,1)$ con constante 1, es decir, para cada $f \in L^1(\mu)$ se tiene*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} : M_\mu^- f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|d\mu(x),$$

para todo $\lambda > 0$.

Consideremos ahora el operador maximal no centrado en $\mathbb{R}$, que viene definido por

$$M_\mu f(x) = \sup_{x \in I} \frac{1}{\mu(I)} \int_I |f|d\mu,$$

donde el supremo se está tomando sobre todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ con $x \in I$. Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ con $x \in I$, entonces podemos escribir $I = (x-k, x+h)$ para

ciertos $k, h > 0$. Entonces podemos estimar

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(I)}\int_I |f|d\mu =& \frac{1}{\mu(I)}\int_{(x-k,x]} |f|d\mu + \frac{1}{\mu(I)}\int_{(x,x+h)} |f|d\mu \\ \leq& \frac{1}{\mu(I)}\int_{(x-k,x]} |f|d\mu + \frac{1}{\mu(I)}\int_{[x,x+h)} |f|d\mu \\ \leq& \frac{1}{\mu((x-k,x])}\int_{(x-k,x]} |f|d\mu + \frac{1}{\mu([x,x+h))}\int_{(x,x+h)} |f|d\mu \\ \leq& M_\mu^- f(x) + M_\mu^+ f(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando supremo sobre todos los intervalos abiertos que contienen a x obtenemos

$$M_\mu f(x) \leq M_\mu^+ f(x) + M_\mu^- f(x). \tag{1.12}$$

Corolario 1.20. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos compactos. Entonces, M_μ es de tipo débil $(1,1)$ con constante 4, es decir, para toda $f \in L^1(\mu)$ se tiene*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} : M_\mu f(x) > \lambda\}) \leq \frac{4}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|d\mu(x),$$

para todo $\lambda > 0$.

Demostración: En vista de (1.12) se tiene la siguiente inclusión

$$\{x \in \mathbb{R} : M_\mu f(x) > \lambda\} \subset \left\{x \in \mathbb{R} : M_\mu^+ f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : M_\mu^- f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Por tanto, aplicando que los maximales laterales son de tipo débil $(1,1)$, y la monotonía de la medida obtenemos la desigualdad deseada,

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in \mathbb{R} : M_\mu f(x) > \lambda\}) \leq& \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R} : M_\mu^+ f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R} : M_\mu^- f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\ \leq& \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f|d\mu + \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f|d\mu = \frac{4}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f|d\mu.\end{aligned}$$

□

Para medidas continuas en $\mathbb{R}$, se puede mejorar fácilmente la constante anterior.

Proposición 1.21. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos compactos y continua ($\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Entonces, M_μ es de tipo débil $(1,1)$ con constante 2, es decir, para toda $f \in L^1(\mu)$ se tiene*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} : M_\mu f(x) > \lambda\}) \leq \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|d\mu(x),$$

para todo $\lambda > 0$.

Demostración: En primer lugar vamos a probar que bajo estas condiciones, para cada $\lambda > 0$ se tiene la siguiente inclusión,

$$\{x \in \mathbb{R} : M_\mu f(x) > \lambda\} \subset \{x \in \mathbb{R} : M_\mu^+ f(x) > \lambda\} \cup \{x \in \mathbb{R} : M_\mu^- f(x) > \lambda\}.$$

Probemos el contrarrecíproco, supongamos que para todo $a < x$ se verifica

$$\frac{1}{\mu((a,x])}\int_{(a,x]}|f|d\mu \leq \lambda,$$

y para cada $b > x$ se tiene

$$\frac{1}{\mu([x,b))}\int_{[x,b)}|f|d\mu \leq \lambda.$$

Entonces, sumando estas desigualdades, y teniendo en cuenta que $\mu(\{x\}) = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{(a,b)}|f|d\mu =& \int_{(a,x]}|f|d\mu + \int_{[x,b)}|f|d\mu \\ \leq& \lambda\left(\mu((a,x]) + \mu([x,b))\right) = \lambda\mu((a,b)).\end{aligned}$$

Como esta desigualdad es válida para todos a, b con $a < x < b$, entonces necesariamente $M_\mu f(x) \leq \lambda$. Esto prueba la inclusión deseada. Aplicando la monotonía de la medida μ podemos concluir,

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in \mathbb{R} : M_\mu f(x) > \lambda\}) \leq& \mu(\{x \in \mathbb{R} : M_\mu^+ f(x) > \lambda\}) + \mu(\{x \in \mathbb{R} : M_\mu^- f(x) > \lambda\}) \\ \leq& \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}|f|d\mu + \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}|f|d\mu = \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}|f|d\mu.\end{aligned}$$

□

En [2] se prueba que el resultado anterior es completamente general, es decir, se puede extender a cualquier medida en $\mathbb{R}$, y esta es la mejor constante para esta desigualdad.

Teorema 1.22. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos compactos. Entonces, M_μ es de tipo débil $(1,1)$ con constante 2.*

4. Teorema de diferenciación de Lebesgue

En esta sección vamos a generalizar el teorema de diferenciación de Lebesgue a medidas de Borel regulares. Para ello seguiremos la prueba del libro de *Stein* y *Shakarchi* [35]. En primer lugar lo probaremos para funciones continuas.

Proposición 1.23. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos. Si $f \in L^1(\mu)$ es continua en $x \in \mathbb{R}^n$, entonces*

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)}f(y)d\mu(y) = f(x).$$

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $y \in B(x,\delta)$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Además, para cada $r > 0$ podemos escribir,

$$\begin{aligned}f(x) - \frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)}f(y)d\mu(y) =& \frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)}f(x)d\mu(y) \\ & - \frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)}f(y)d\mu(y) \\ =& \frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)}\left(f(x) - f(y)\right)d\mu(y).\end{aligned}$$

Entonces para cada $r \in (0,\delta)$ tenemos que $y \in B(x,r) \subset B(x,\delta)$ y por tanto $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, luego

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)d\mu(y)\right| &= \left|\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} (f(x)-f(y))\,d\mu(y)\right| \\ &\leq \frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(x)-f(y)|\,d\mu(y) < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Para extender este resultado a todo $L^1_{loc}(\mu)$ vamos a hacer uso del siguiente resultado clásico, cuya demostración puede encontrarse en *Rudin* [30].

Teorema 1.24. *Sean μ una medida regular en $\mathbb{R}^n$, y $1 \leq p < \infty$, entonces el espacio de las funciones continuas y de soporte compacto, $C_c(\mathbb{R}^n)$, es denso en $L^p(\mu)$.*

Enunciemos el resultado principal de esta sección.

Teorema 1.25 (Teorema de diferenciación de Lebesgue)**.** *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos. Si $f \in L^1(\mu)$, entonces*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)d\mu(y) = f(x), \tag{1.13}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ con respecto a la medida μ.

Demostración: Sea $f \in L^1(\mu)$. Vamos a probar que para cada $\alpha > 0$ el conjunto

$$E_\alpha = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0^+} \left|\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)d\mu(y) - f(x)\right| > 2\alpha\right\}$$

tiene medida cero; esto garantiza que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\frac{1}{n}}$ tiene medida cero y, por lo tanto, (1.13) se da para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ ya que esta igualdad es válida si y solo si $x \in E^c$.
Sea $\varepsilon > 0$, como $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^1(\mu)$, entonces existe g continua de soporte compacto con $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Como g es continua, le podemos aplicar la Proposición 1.23, y obtenemos $\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} g(y)d\mu(y) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Podemos escribir,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)dy - f(x) &= \left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} (f(y)-g(y))\,d\mu(y)\right) \\ &+ \left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} g(y)d\mu(y) - g(x)\right) \\ &+ (g(x)-f(x))\end{aligned}$$

Entonces, tomando límite superior en la igualdad anterior obtenemos

$$\limsup_{r\to 0^+} \left|\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)d\mu(y) - f(x)\right| \leq M^c_\mu(f-g)(x) + |g(x)-f(x)|.$$

En vista de esta desigualdad, si definimos los conjuntos $F_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : M^c_\mu(f-g)(x) > \alpha\}$ y $G_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)-g(x)| > \alpha\}$, tenemos que $E_\alpha \subset F_\alpha \cup G_\alpha$. Ahora bien, para la medida de G_α tenemos la siguiente estimación

$$\mu(G_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\int_{G_\alpha} |f(y)-g(y)|d\mu(y) \leq \frac{1}{\alpha}\|f-g\|_1.$$

Además, como M_μ^c es de tipo débil $(1,1)$ tenemos,

$$\mu(F_\alpha) \leq \frac{c_n}{\alpha} \|f-g\|_1 .$$

Entonces, juntando estas estimaciones obtenemos,

$$\begin{aligned}\mu(E_\alpha) \leq & \mu(F_\alpha) + \mu(G_\alpha) \leq \frac{c_n}{\alpha} \|f-g\|_1 + \frac{1}{\alpha} \|f-g\|_1 \\ \leq & \frac{c_n}{\alpha}\varepsilon + \frac{1}{\alpha}\varepsilon.\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $\varepsilon \to 0^+$ obtenemos $\mu(E_\alpha) = 0$. □
El resultado anterior se puede extender a $L^1_{loc}(\mu)$, ya que es un concepto local.

Corolario 1.26. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos. Si $f \in L^1_{loc}(\mu)$, entonces*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)d\mu(y) = f(x), \tag{1.14}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración: Observemos que $\mathbb{R}^n$ es unión numerable de bolas $B(0,n)$ con $n = 1, 2, ...$, luego es suficiente probar (1.14) para casi todo x en una bola fijada $B(0,n)$. Sea $f \in L^1_{loc}(\mu)$, entonces $f\chi_{B(0,n)} \in L^1(\mu)$, y le podemos aplicar el resultado anterior. □
Como consecuencia de estos resultados obtenemos la siguiente propiedad.

Corolario 1.27. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y $f \in L^1_{loc}(\mu)$. Entonces se verifica $|f| \leq M_\mu^c f$ en casi todo punto.*

Observación 1.28. Los resultados de esta sección son válidos si cambiamos la base por cubos, es decir, si $f \in L^1_{loc}(\mu)$, entonces

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mu(Q(x,r))} \int_{Q(x,r)} f(y)d\mu(y) = f(x),$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Y por tanto, $|f| \leq \widetilde{M}_\mu^c f$ en casi todo punto.

Definición 1.29. Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos. Definimos el conjunto de Lebesgue de una función medible f con respecto a μ, $L_\mu(f)$, como

$$L_\mu(f) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) = 0 \right\}.$$

Observación 1.30. Lo que hemos probado en el Teorema 1.25 es que $\mu(L_\mu(f)^c) = 0$ para toda función $f \in L^1_{loc}(\mu)$. Es decir, que para una función localmente integrable f, casi todo punto de $\mathbb{R}^n$ está en el conjunto de Lebesgue de f.

Para terminar esta sección vamos a ver que el Teorema 1.25 también es válido tomando medias sobre familias de conjuntos que se contraen adecuadamente a x, definamos este concepto.

Definición 1.31. Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y $x \in \mathbb{R}^n$. Diremos que una familia $\{S_r\}_{r>0}$ de subconjuntos medibles Borel de $\mathbb{R}^n$ se contrae adecuadamente a x con respecto a la medida μ, si verifica las dos siguientes condiciones:

1. $S_r \subset B(x,r)$ para todo $r > 0$.

2. Existe $\alpha > 0$ tal que $\mu(S_r) \geq \alpha\mu(B(x,r))$ para todo $r > 0$.

Teorema 1.32. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos, $f \in L^1_{loc}(\mu)$ y $x \in L_\mu(f)$. Entonces, para toda familia $\{S_r\}_{r>0}$ que se contraiga adecuadamente a x, tenemos que*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mu(S_r)} \int_{S_r} |f(y) - f(x)| d\mu(y) = 0,$$

y, por tanto,

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mu(S_r)} \int_{S_r} f(y) d\mu(y) = f(x).$$

Demostración: Sean $f \in L^1_{loc}(\mu)$, $x \in L_\mu(f)$ y $\{S_r\}_{r>0}$ una familia que se contraiga adecuadamente a x. Entonces por definición $S_r \subset B(x,r)$, y existe un $\alpha > 0$ independiente de r tal que $\mu(S_r) \geq \alpha\mu(B(x,r))$, luego, para cada $r > 0$ tenemos,

$$\frac{1}{\mu(S_r)} \int_{S_r} |f(y) - f(x)| d\mu(y) \leq \frac{1}{\alpha\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| d\mu(y).$$

Tomando límite cuando r tiende a 0 y usando que $x \in L_\mu(f)$, obtenemos

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mu(S_r)} \int_{S_r} |f(y) - f(x)| d\mu(y) \leq \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\alpha\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) = 0.$$

Por último, basta observar que

$$\left| \frac{1}{\mu(S_r)} \int_{S_r} f(y) d\mu(y) - f(x) \right| \leq \frac{1}{\mu(S_r)} \int_{S_r} |f(y) - f(x)| d\mu(y),$$

para obtener $\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mu(S_r)} \int_{S_r} f(y) d\mu(y) = f(x)$. □

5. Descomposición de Calderón-Zygmund

Para finalizar el capítulo, vamos a introducir una herramienta técnica importante que se usará en el siguiente capítulo, la descomposición de Calderón-Zygmund.
Recordemos que un cubo diádico en $\mathbb{R}^n$ es el conjunto

$$[2^k m_1, 2^k(m_1 + 1)) \times ... \times [2^k m_n, 2^k(m_n + 1)),$$

donde $k, m_1, ..., m_n \in \mathbb{Z}$. Una propiedad muy útil de los cubos diádicos es que dados dos cubos diádicos, entonces o son disjuntos, o uno de ellos está contenido en el otro. Vamos a probar la siguiente versión de la descomposición de Calderón-Zygmund.

Teorema 1.33 (Descomposición de Calderón-Zygmund, [10])**.** *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Sean $f \in L^1(\mu)$ y $\alpha > 0$. Entonces existen dos funciones g y b en $\mathbb{R}^n$ tales que:*

1. *$f = g + b$.*

2. *$\|g\|_1 \leq \|f\|_1$, y $\|g\|_\infty \leq D(\mu)\alpha$.*

3. $b = \sum_j b_j$, *donde cada* b_j *tiene soporte contenido en un cubo diádico* Q_j. *Además, si* $j \neq k$, *entonces* $Q_j \cap Q_k = \emptyset$.

4. $\displaystyle\int_{Q_j} b_j(x)d\mu(x) = 0.$

5. $\|b_j\|_1 \leq 2\alpha D(\mu)\mu(Q_j).$

6. $\displaystyle\sum_j \mu(Q_j) < \frac{1}{\alpha}\|f\|_1.$

A esta descomposición se le llama descomposición de Calderón-Zygmund de f a altura α. La función g es la la parte buena ("good") de la descomposición, ya que es integrable y acotada. La función b es la parte mala ("bad"), pero está cuidadosamente elegida para tener integral cero. Además los puntos 1 y 2 implican que b es integrable.

Observación 1.34. En las condiciones del teorema podemos afirmar que $g \in L^p(\mu)$, ya que $g \in L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ y $L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu) \subset L^p(\mu)$ para todo $1 < p < \infty$.

Demostración: Descompongamos $\mathbb{R}^n$ en una malla de cubos diádicos disjuntos, todos del mismo tamaño, tal que

$$\mu(Q) \geq \frac{1}{\alpha}\|f\|_1,$$

para cada cubo Q de la malla. Diremos que estos cubos son de generación 0. Ahora subdividamos cada cubo de generación 0 en 2^n cubos diádicos congruentes. Tenemos ahora una nueva malla de cubos diádicos, que llamaremos de generación 1. Seleccionamos un cubo de generación 1 si verifica

$$\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f(x)|d\mu(x) > \alpha. \tag{1.15}$$

Sea $S^{(1)}$ el conjunto de los cubos de generación 1 seleccionados. Subdividimos cada cubo de generación 1 que no haya sido seleccionado en 2^n cubos diádicos congruentes, y los llamamos cubos de generación 2. Seleccionamos los cubos Q de generación 2 que cumplan (1.15), y denotamos al conjunto de tales cubos como $S^{(2)}$. Repetimos este proceso indefinidamente.

El conjunto de todos los cubos seleccionados, $\cup_{n=1}^\infty S^{(n)}$, es numerable y por lo tanto podemos escribirlo como $\{Q_j\}$. Observemos que este conjunto podría ser vacío y tendriamos $b = 0$ y $g = f$. Los cubos $\{Q_j\}$ son disjuntos, ya que si dos cubos de esta familia tuvieran intersección no vacía, entonces uno estaría dentro del otro y esto es imposible debido al proceso de selección. Ahora definimos,

$$b_j = \left(f - \frac{1}{\mu(Q_j)}\int_{Q_j} f(x)d\mu(x)\right)\chi_{Q_j}, \quad b = \sum_j b_j, \quad \text{y} \quad g = f - b.$$

Con estas definiciones se cumplen trivialmente los puntos 1, 3 y 4. Probemos el punto 5. Para un cubo seleccionado Q_j, existe un único cubo Q' no seleccionado de una generación mayor, que contiene a Q_j. Como Q' no fue seleccionado, entonces se verifica $\frac{1}{\mu(Q')}\int_{Q'} |f(x)|d\mu(x) \leq \alpha$. Luego,

$$\frac{1}{\mu(Q_j)}\int_{Q_j} |f(x)|d\mu(x) \leq \frac{1}{\mu(Q_j)}\int_{Q'} |f(x)|d\mu(x) = \frac{D(\mu)}{\mu(Q')}\int_{Q'} |f(x)|d\mu(x) \leq D(\mu)\alpha,$$

donde hemos usado que $Q' \subset 3Q_j$ y por tanto $\mu(Q') \leq \mu(3Q_j) \leq D(\mu)\mu(Q_j)$. Utilizando la estimación anterior obtenemos,

$$\begin{aligned}\|b_j\|_1 = \int_{Q_j} |b_j(x)|d\mu(x) \leq \int_{Q_j} |f(x)|d\mu(x) + \mu(Q_j)\left|\frac{1}{\mu(Q_j)}\int_{Q_j}|f(x)|d\mu(x)\right| \\ \leq 2\int_{Q_j}|f(x)|d\mu(x) \leq 2\alpha D(\mu)\mu(Q_j).\end{aligned}$$

El punto 6 es una consecuencia prácticamente inmediata del proceso de selección de los cubos $\{Q_j\}$,

$$\sum_j \mu(Q_j) \leq \sum_j \frac{1}{\alpha}\int_{Q_j}|f(x)|d\mu(x) = \frac{1}{\alpha}\int_{\cup_j Q_j}|f(x)|d\mu(x) \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_1.$$

Por último probemos el punto 2. Tenemos

$$g = \begin{cases} f & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \cup_j Q_j \\ \frac{1}{\mu(Q_j)}\int_{Q_j} f(x)d\mu(x) & \text{en } Q_j \end{cases}.$$

Luego, si $x \in Q_j$ entonces $g(x) = \frac{1}{\mu(Q_j)}\int_{Q_j} f(y)d\mu(y) \leq D(\mu)\alpha$. Veamos que g es acotada en $\mathbb{R}^n \setminus \cup_j Q_j$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_j Q_j$, y cada $k \geq 0$, existe un único cubo diádico $Q_x^{(k)}$ de generación k que no ha sido seleccionado y que contiene a x. Luego, para cada $k \geq 0$ tenemos

$$\frac{1}{\mu(Q_x^{(k)})}\int_{Q_x^{(k)}} f(y)d\mu(y) \leq \alpha.$$

Por el Teorema de diferenciación de Lebesgue tenemos que para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_j Q_j$ se verifica

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mu(Q_x^{(k)})}\int_{Q_x^{(k)}} f(y)d\mu(y) = f(x).$$

Luego, $|f(x)| \leq \alpha$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_j Q_j$, es decir, $\|g\|_\infty \leq D(\mu)\alpha$. Veamos que $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$.

$$\begin{aligned}\|g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|d\mu(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus\cup_j Q_j}|f(x)|d\mu(x) + \sum_j\int_{Q_j}\left|\frac{1}{\mu(Q_j)}\int_{Q_j}f(x)d\mu(x)\right|d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus\cup_j Q_j}|f(x)|d\mu(x) + \sum_j \mu(Q_j)\left|\frac{1}{\mu(Q_j)}\int_{Q_j}f(x)d\mu(x)\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus\cup_j Q_j}|f(x)|d\mu(x) + \sum_j\int_{Q_j}|f(x)|\,d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus\cup_j Q_j}|f(x)|d\mu(x) + \int_{\cup_j Q_j}|f(x)|\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|d\mu(x) = \|f\|_1.\end{aligned}$$

□

La versión clásica de este resultado es la siguiente.

Teorema 1.35. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Sean $f \in L^1(\mu)$ no negativa y $\alpha > 0$. Entonces existe una sucesión de cubos diádicos disjuntos $\{Q_j\}$ tal que*

1. $f(x) \leq \alpha$ *para casi todo punto* $x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_j Q_j$.

2. $\mu\left(\bigcup_j Q_j\right) \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_1$.

3. $\alpha \leq \dfrac{1}{\mu(Q_j)} \displaystyle\int_{Q_j} f(x) d\mu(x) \leq D(\mu)\alpha$.

Capítulo 2

Desigualdades con pesos para M_μ

Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre compactos y con la propiedad de duplicación. En este capítulo vamos a denotar por M_μ al operador maximal no centrado con respecto a la base de cubos en $\mathbb{R}^n$, es decir, el operador $\widetilde{M_\mu}$ del capítulo anterior. Este capítulo está dedicado a estudiar tres cuestiones, principalmente. En primer lugar, dado $1 \leq p < \infty$, caracterizaremos los pares de pesos (u, v) tales que el operador M_μ es de tipo débil (p, p) con respecto al par de medidas $(ud\mu, vd\mu)$, esto es que existe una constante $A > 0$ tal que para cada función $f \in L^p(vd\mu)$ se verifica

$$\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(y) > \lambda\}} u(x) d\mu(x) \leq \frac{A}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x) d\mu(x),$$

para todo $\lambda > 0$. Veremos que se puede determinar una condición, denotada por $A_p(\mu)$, para la que esto se cumple si y sólo si (u, v) es un par de pesos que verifica la condición $A_p(\mu)$. El estudio de la clase $A_p(\mu)$ y sus propiedades es lo primero que se abordará en este capítulo. En segundo lugar, dado $1 < p < \infty$, caracterizaremos los pares de pesos (u, v) tales que el operador M_μ es de tipo fuerte (p, p) con respecto al par de medidas $(ud\mu, vd\mu)$, esto es que existe una constante $B > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_\mu f(x)|^p u(x) d\mu(x) \leq B \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x) d\mu(x),$$

para toda $f \in L^p(vd\mu)$. Veremos que se puede determinar una condición, denotada por $S_p(\mu)$, para la que esto se cumple si y sólo si (u, v) es un par de pesos que verifica la condición $S_p(\mu)$. Por último estudiaremos el problema anterior para el caso de dos pesos iguales, $u = v$, y veremos que en este caso es equivalente a que $(u, u) \in A_p(\mu)$. Para probar esta última caracterización estudiaremos la desigualdad de Hölder inversa y la importante propiedad de apertura a la izquierda de las clases $A_p(\mu)$, si $w \in A_p(\mu)$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\varepsilon}(\mu)$.

Seguidamente estudiaremos la clase $A_\infty(\mu)$, y el teorema de Jones de factorización de pesos $A_p(\mu)$. Por último, expondremos algunos de los resultados existentes de la teoría de pesos $A_p(\mu)$ para medidas no necesariamente doblantes y daremos un ejemplo de que para medidas generales la propiedad de apertura a la izquierda de las clases $A_p(\mu)$ no es cierta.

1. Pares de pesos $A_p(\mu)$

Comencemos definiendo lo que entenderemos por peso.

Definición 2.1. Un peso es una función w medible, localmente integrable y verificando $0 < w < \infty$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$. Dado un conjunto medible E denotaremos $w_\mu(E) = \int_E w(x)d\mu(x)$.

Definición 2.2. Sean u y v dos pesos.

- Si $1 < p < \infty$, decimos que (u, v) verifica la condición $A_p(\mu)$, o simplemente $(u, v) \in A_p(\mu)$, si existe $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1} \leq C, \tag{2.1}$$

  para todo cubo Q, donde entendemos $0 \cdot \infty = 0$.

- Diremos que (u, v) verifica la condición $A_1(\mu)$, o simplemente $(u, v) \in A_1(\mu)$, si existe una constante $C > 0$ tal que $M_\mu u(x) \leq Cv(x)$ en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 2.3. *Sean u y v dos pesos. Entonces, $(u, v) \in A_1(\mu)$ si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que para cada cubo Q se tiene*

$$\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q u(x)d\mu(x) \leq Cv(x) \tag{2.2}$$

para casi todo $x \in Q$.

Demostración: En primer lugar observemos que si $(u, v) \in A_1(\mu)$, entonces para cada cubo Q se tiene trivialmente (2.2). Supongamos ahora que existe $C > 0$ tal que para todo cubo Q se verifica (2.2). Si $x \in \mathbb{R}^n$ verifica $M_\mu u(x) > Cv(x)$, entonces existe un cubo Q con vértices de coordenadas racionales tal que $x \in Q$ y

$$\frac{u_\mu(Q)}{\mu(Q)} > Cv(x).$$

Por hipótesis sabemos que x pertenece a un subconjunto de Q de medida cero. Tomando la unión sobre tales cubos, que es numerable, vemos que $M_\mu u(x) > Cv(x)$ se tiene en un conjunto de medida cero en $\mathbb{R}^n$. □

Observación 2.4. La condición $A_1(\mu)$ se puede entender como el límite de las condiciones $A_p(\mu)$ cuando p tiende a 1. Observemos que para cada cubo Q se verifica

$$\lim_{p\to 1^+}\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1} = \lim_{p\to 1^+}\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p'-1}} = \left\|v^{-1}\right\|_{L^\infty(Q,\mu)}.$$

Teniendo en cuenta que $\|v^{-1}\|_{L^\infty(Q,\mu)} = \operatorname{ess\,sup}_{x\in Q}\frac{1}{v(x)} = \left(\operatorname{ess\,ínf}_{x\in Q} v(x)\right)^{-1}$, entonces obtenemos que el límite cuando p tiende a 1 de (2.1) es

$$\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q u(x)d\mu(x) \leq C \operatorname*{ess\,ínf}_{x\in Q} v(x),$$

para cada cubo Q. Luego, en vista de la Proposición 2.3, esto es la condición $A_1(\mu)$.

1.1. Caracterización alternativa de la condición $A_p(\mu)$

Para cada función localmente integrable f y cada cubo Q, denotamos por $f_{Q,\mu}$ a la media de f en el cubo Q, es decir,

$$f_{Q,\mu} = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f(x) d\mu(x).$$

Vamos a dar una caracterización de la condición $A_p(\mu)$ que puede encontrarse en el libro de *Stein* [34].

Proposición 2.5. *Sea $1 \leq p < \infty$, entonces $(u, v) \in A_p(\mu)$ si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$(f_{Q,\mu})^p \leq \frac{C}{u_\mu(Q)} \int_Q f(x)^p v(x) d\mu(x), \tag{2.3}$$

para toda función no negativa f, y todo cubo Q. Donde en el cociente de (2.3) si $u_\mu(Q) = 0$ usaremos la siguiente convención, $\frac{a}{0} = \infty$ para $a > 0$ y $\frac{0}{0} = 0$.

Demostración: Probemos primero el caso $p = 1$. Supongamos que $(u, v) \in A_1(\mu)$. Sea Q un cubo, podemos suponer $u_\mu(Q) > 0$. Entonces aplicando (2.2) tenemos

$$\begin{aligned} f_{Q,\mu} =& \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f(x) d\mu(x) = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f(x) v(x) v(x)^{-1} d\mu(x) \\ \leq& \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f(x) v(x) C \frac{\mu(Q)}{u_\mu(Q)} dx = \frac{C}{u_\mu(Q)} \int_Q f(x) v(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que se verifica (2.3). Sean Q un cubo tal que $u_\mu(Q) > 0$, y $S \subset Q$ medible. Consideremos $f = \chi_S$, entonces

$$f_{Q,\mu} = \frac{\mu(S)}{\mu(Q)} \leq \frac{C}{u_\mu(Q)} \int_S v(x) d\mu(x) = C \frac{v_\mu(S)}{u_\mu(Q)}.$$

Luego, tenemos que para cada cubo Q y cada $S \subset Q$ medible se verifica,

$$\frac{u_\mu(Q)}{\mu(Q)} \leq C \frac{v_\mu(S)}{\mu(S)}.$$

Sea $a = \operatorname{ess\,ínf}\{v(x) : x \in Q\}$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $S_\varepsilon \subset Q$ tal que $\mu(S_\varepsilon) > 0$ y $v(x) \leq a + \varepsilon$ para casi todo $x \in S_\varepsilon$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ tenemos

$$\frac{u_\mu(Q)}{\mu(Q)} \leq \frac{C}{\mu(S_\varepsilon)} \int_{S_\varepsilon} v(x) d\mu(x) \leq \frac{C}{\mu(S_\varepsilon)} \int_{S_\varepsilon} (a + \varepsilon) d\mu(x) = C(a + \varepsilon).$$

Luego, $\frac{u_\mu(Q)}{\mu(Q)} \leq C \operatorname{ess\,ínf}\{v(x) : x \in Q\}$ para cada cubo Q. Por tanto, para cada cubo Q tenemos $\frac{u_\mu(Q)}{\mu(Q)} \leq C v(x)$ para casi todo $x \in Q$, es decir, se verifica (2.2) y por tanto $(u, v) \in A_1(\mu)$.
Sea ahora $p > 1$. Supongamos que $(u, v) \in A_p(\mu)$. Sea Q un cubo tal que $u_\mu(Q) > 0$. Entonces podemos escribir,

$$f_{Q,\mu} = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f(x) d\mu(x) = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f(x) v(x)^{\frac{1}{p}} v(x)^{-\frac{1}{p}} d\mu(x),$$

y aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes conjugados p y p' obtenemos,

$$(f_{Q,\mu})^p \leq \frac{1}{\mu(Q)^p}\left(\int_Q f(x)^p v(x)d\mu(x)\right)\left(\int_Q v(x)^{-\frac{p'}{p}}d\mu(x)\right)^{\frac{p}{p'}}.$$

Observemos que $\frac{p'}{p} = p' - 1$, entonces aplicando que $(u, v) \in A_p(\mu)$ obtenemos,

$$(f_{Q,\mu})^p \leq \frac{1}{\mu(Q)^p}\left(\int_Q f(x)^p v(x)d\mu(x)\right)\frac{C}{u_\mu(Q)}\mu(Q)^p = \frac{C}{u_\mu(Q)}\int_Q f(x)^p v(x)d\mu(x).$$

Supongamos ahora que (u, v) verifica (2.3). Sea Q un cubo tal que $u_\mu(Q) > 0$. Consideremos $f = v^{1-p'}$, entonces para cada cubo Q tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(Q)^p}\left(\int_Q v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^p &\leq \frac{C}{u_\mu(Q)}\int_Q v(x)^{-p'}v(x)d\mu(x)\\ &\leq \frac{C}{u_\mu(Q)}\int_Q v(x)^{1-p'}d\mu(x).\end{aligned}$$

Esto es equivalente a

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q u(x)d\mu(x)\right)\left(\int_Q v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1} \leq C,$$

es decir, $(u, v) \in A_p(\mu)$. □

1.2. Propiedades de los pares de pesos $A_p(\mu)$

Veamos algunas propiedades de las clases de pares de pesos $A_p(\mu)$.

Proposición 2.6. *Sea $1 < p < \infty$, y p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces, $(u, v) \in A_p(\mu)$, si y sólo si $(v^{1-p'}, u^{1-p'}) \in A_{p'}(\mu)$.*

Demostración: Observemos que $(1 - p)(1 - p') = 1$, luego $u^{(1-p')(1-p)} = u$. Por tanto,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \left(u(x)^{1-p'}\right)^{1-p}d\mu(x)\right)^{p'-1}\\ &\qquad = \left[\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1}\right]^{p'-1}.\end{aligned}$$

Como consecuencia de la igualdad anterior obtenemos que $v^{1-p'}$ y $u^{1-p'}$ son funciones localmente integrables y que se da la equivalencia $(u, v) \in A_p(\mu)$ si y sólo si $(v^{1-p'}, u^{1-p'}) \in A_{p'}(\mu)$. □

Observación 2.7. El resultado anterior para $p = 2$ nos está diciendo que $(u, v) \in A_2$ si y solo si $(\frac{1}{v}, \frac{1}{u}) \in A_2(\mu)$. La condición $A_2(\mu)$ es más simple y simétrica:

$$\sup_Q \left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \frac{1}{v(x)}d\mu(x)\right) < \infty.$$

Proposición 2.8. *Si $1 \leq p < q$ entonces $A_p(\mu) \subset A_q(\mu)$.*

Demostración: Supongamos primero $p = 1$. Sea $(u, v) \in A_1(\mu)$, es decir, existe $C > 0$ tal que $M_\mu u(x) \leq Cv(x)$ en casi todo punto. Sea Q un cubo, entonces tenemos,

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q u(y) d\mu(y) \leq M_\mu u(x) \leq Cv(x),$$

para casi todo $x \in Q$. Por tanto, para cada $q > 1$ tenemos,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q u(x) d\mu(x)\right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{1-q'} d\mu(x)\right)^{q-1} \\
&\qquad = \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q u(y) d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q-1}} v(x)^{1-q'} d\mu(x)\right)^{q-1} \\
&\qquad \leq \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q (Cv(x))^{\frac{1}{q-1}} v(x)^{1-q'} d\mu(x)\right)^{q-1} \\
&\qquad = \left(\frac{C^{\frac{1}{q-1}}}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{\frac{-(1-q)(1-q')+1}{q-1}} d\mu(x)\right)^{q-1} \\
&\qquad = \left(\frac{C^{\frac{1}{q-1}}}{\mu(Q)} \int_Q d\mu(x)\right)^{q-1} = C.
\end{aligned}$$

Luego $A_1(\mu) \subset A_q(\mu)$. Supongamos ahora $p > 1$ y sea $(u, v) \in A_p(\mu)$. Entonces para cada $q > p$ tenemos $\frac{1-p'}{1-q'} > 1$, y apliquemos la desigualdad de Hölder con este exponente y medida $\frac{d\mu}{\mu(Q)}$,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{1-q'} d\mu(x)\right)^{q-1} &\leq \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{(1-q')\frac{1-p'}{1-q'}} d\mu(x)\right)^{\frac{1-q'}{1-p'}(q-1)} \\
&= \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{1-p'} d\mu(x)\right)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Como consecuencia obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q u(x) d\mu(x)\right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{1-q'} d\mu(x)\right)^{q-1} \\
&\qquad \leq \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q u(x) d\mu(x)\right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q v(x)^{1-p'} d\mu(x)\right)^{p-1}
\end{aligned}$$

para cada cubo Q, luego $(u, v) \in A_q(\mu)$. □

2. Caracterización de los pares de pesos (u, v) para los que M_μ es de tipo débil (p, p)

En esta sección vamos a estudiar el primer problema que nos planteábamos en la introducción del capítulo, vamos a caracterizar los pares de pesos (u, v) tales que el operador M_μ es de tipo débil (p, p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$, donde μ es una medida con la propiedad de duplicación. Veremos que esto será equivalente a que $(u, v) \in A_p(\mu)$.

Teorema 2.9. *Sean μ una medida de Borel finita sobre compactos en $\mathbb{R}^n$ con la propiedad de duplicación, y $1 \leq p < \infty$. Son equivalentes:*

1. $(u, v) \in A_p(\mu)$.
2. *El operador maximal M_μ es de tipo débil (p, p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que para toda $f \in L^p(vd\mu)$ se verifica*

$$\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(y) > \lambda\}} u(x)d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x)d\mu(x), \tag{2.4}$$

para todo $\lambda > 0$.

En primer lugar vamos a dar una prueba usando una descomposición de Calderón-Zygmund adecuada, tal y como se hace en el libro de *Duoandikoetxea* [6] para μ la medida de Lebesgue.

Demostración: Supongamos (2.4). Sea $f \geq 0$ y Q un cubo en $\mathbb{R}^n$ con $\int_Q f d\mu > 0$. Sea λ tal que $0 < \lambda < \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f d\mu$. Entonces tenemos $Q \subset \{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(x) > \lambda\}$, y por tanto

$$u_\mu(Q) = \int_Q u(x)d\mu(x) \leq \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(y) > \lambda\}} u(x)d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p v(x)d\mu(x).$$

Es decir, para cada λ con $0 < \lambda < \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f d\mu$ tenemos

$$u_\mu(Q)\lambda^p \leq C \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p v(x)d\mu(x),$$

entonces haciendo tender $\lambda \to \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f d\mu$ nos queda

$$u_\mu(Q) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f(x)d\mu(x) \right)^p \leq C \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p v(x)d\mu(x), \tag{2.5}$$

desigualdad que es válida también si $\int_Q f d\mu = 0$. Esta desigualdad no es otra cosa que (2.3), luego $(u, v) \in A_p(\mu)$.

Supongamos ahora que $(u, v) \in A_p(\mu)$. Sean $\lambda > 0$ y $f \geq 0$, vamos a hacer una *descomposición de Calderón-Zygmund* (Teorema 1.35) de f a altura $\frac{\lambda}{D(\mu)^2}$, siendo $D(\mu)$ la constante de la propiedad de duplicación de μ. Entonces obtenemos una familia numerable de cubos diádicos disjuntos $\{Q_j\}$ tales que

- $f(x) \leq \dfrac{\lambda}{D(\mu)^2}$ en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_j Q_j$.
- $\mu\left(\bigcup_j Q_j\right) \leq \dfrac{D(\mu)^2}{\lambda} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\mu(x)$.
- $\dfrac{\lambda}{D(\mu)^2} < \dfrac{1}{\mu(Q_j)} \displaystyle\int_{Q_j} f(x)d\mu(x) \leq \dfrac{\lambda}{D(\mu)}$ para cada cubo Q_j de la familia.

Veamos que se verifica la siguiente incluisión,

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu^c f(x) > \frac{\lambda}{D(\mu)}\right\} \subset \bigcup_j 3Q_j. \tag{2.6}$$

Supongamos que $x \notin \bigcup_j 3Q_j$, y tomemos un cubo Q con centro en x. Si $k \in \mathbb{Z}$ es tal que $2^{k-1} \leq l(Q) < 2^k$, entonces Q interseca a lo sumo a 2^n cubos del retículo diádico de lado 2^k, que denotaremos $R_1, ..., R_m$. Ningún R_i está contenido en un cubo de la familia $\{Q_j\}$, ya que en ese caso tendríamos $x \in \bigcup_j 3Q_j$, luego

$$\frac{1}{\mu(R_i)} \int_{R_i} f(x)d\mu(x) \leq \frac{\lambda}{D(\mu)^2},$$

para cada $i \in \{1, ..., m\}$. Entonces tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f(x)d\mu(x) \leq & \sum_{i=1}^m \frac{1}{\mu(Q)} \int_{Q\cap R_i} f(x)d\mu(x) \leq \sum_{i=1}^m \frac{\mu(R_i)}{\mu(Q)} \frac{1}{\mu(R_i)} \int_{R_i} f(x)d\mu(x) \\ \leq & \sum_{i=1}^m \frac{\mu(R_i)}{\mu(Q)} \frac{\lambda}{D(\mu)^2} = \frac{\lambda}{D(\mu)^2} \frac{\mu(\cup_i R_i)}{\mu(Q)} \leq \frac{\lambda}{D(\mu)^2} \frac{\mu(3Q)}{\mu(Q)} \leq \frac{\lambda}{D(\mu)},\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado la propiedad de duplicación de μ. Por lo tanto, $x \notin \{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu^c f(x) > \frac{\lambda}{D(\mu)}\}$, y queda probada la inclusión (2.6). En vista de la Proposición 1.9 tenemos que M_μ y M_μ^c son equivalentes, y por tanto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(x) > \lambda\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu^c f(x) > \frac{\lambda}{D(\mu)}\right\}.$$

Entonces para $p = 1$ tenemos,

$$\begin{aligned}u_\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : & M_\mu f(x) > \lambda\}) \leq u_\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu^c f(x) > \frac{\lambda}{D(\mu)}\right\}\right) \\ \leq & u_\mu\left(\bigcup_j 3Q_j\right) \leq \sum_{j=1}^\infty \int_{3Q_j} u(x)d\mu(x) \\ \leq & \sum_{j=1}^\infty \mu(3Q_j) \frac{1}{\mu(3Q_j)} \int_{3Q_j} u(x)d\mu(x) \left(\frac{D(\mu)^2}{\lambda} \frac{1}{\mu(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)d\mu(x)\right) \\ = & \frac{D(\mu)^2}{\lambda} \sum_{j=1}^\infty \frac{\mu(3Q_j)}{\mu(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)d\mu(x) \left(\frac{1}{\mu(3Q_j)} \int_{3Q_j} u(x)d\mu(x)\right) \\ \leq & \frac{D(\mu)^3}{\lambda} \sum_{j=1}^\infty \int_{Q_j} f(x) \left(\frac{1}{\mu(3Q_j)} \int_{3Q_j} u(y)d\mu(y)\right) d\mu(x) \\ \leq & \frac{D(\mu)^3}{\lambda} \sum_{j=1}^\infty \int_{Q_j} f(x)M_\mu u(x)d\mu(x) = \frac{D(\mu)^3}{\lambda} \int_{\cup_j Q_j} f(x)M_\mu u(x)d\mu(x) \\ \leq & \frac{D(\mu)^3}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)M_\mu u(x)d\mu(x) \leq \frac{D(\mu)^3 C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)v(x)d\mu(x).\end{aligned}$$

Supongamos ahora $p > 1$, entonces usando (2.6), la desigualdad de Hölder y la condición $A_p(\mu)$, podemos concluir

$$
\begin{aligned}
u_\mu(\{x\in\mathbb{R}^n : M_\mu f(x)>\lambda\}) &\le u_\mu\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : M_\mu^c f(x)>\frac{\lambda}{D(\mu)}\right\}\right)\\
&\le u_\mu\left(\bigcup_j 3Q_j\right)\le\sum_{j=1}^{\infty}u_\mu(3Q_j)\le\sum_{j=1}^{\infty}u_\mu(3Q_j)\left(\frac{D(\mu)^2}{\lambda}\frac{1}{\mu(Q_j)}\int_{Q_j}f(x)d\mu(x)\right)^p\\
&=\frac{D(\mu)^{2p}}{\lambda^p}\sum_{j=1}^{\infty}u_\mu(3Q_j)\frac{1}{\mu(Q_j)^p}\left(\int_{Q_j}f(x)v(x)^{\frac{1}{p}}v(x)^{-\frac{1}{p}}d\mu(x)\right)^p\\
&\le\frac{D(\mu)^{2p}}{\lambda^p}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{u_\mu(3Q_j)}{\mu(Q_j)^p}\left(\int_{Q_j}v(x)^{-\frac{p'}{p}}d\mu(x)\right)^{\frac{p}{p'}}\int_{Q_j}f(x)^pv(x)d\mu(x)\\
&\le\frac{D(\mu)^{2p}}{\lambda^p}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{u_\mu(3Q_j)}{\mu(3Q_j)^p}\left(\int_{3Q_j}v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1}\frac{\mu(3Q_j)^p}{\mu(Q_j)^p}\int_{Q_j}f(x)^pv(x)d\mu(x)\\
&\le\frac{D(\mu)^{3p}C}{\lambda^p}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{Q_j}f(x)^pv(x)d\mu(x)=\frac{D(\mu)^{3p}C}{\lambda^p}\int_{\bigcup_j Q_j}f(x)^pv(x)d\mu(x)\\
&\le\frac{D(\mu)^{3p}C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)^pv(x)d\mu(x).
\end{aligned}
$$

Luego, M_μ verifica la desigualdad de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$. □

Ahora vamos a dar una segunda demostración usando el Lema de recubrimiento de Besicovitch, con la que obtendremos una mejor dependencia de $D(\mu)$ en la constante de la desigualdad de tipo débil.

Demostración: Supongamos que $(u,v)\in A_p(\mu)$. Probaremos en primer lugar que M_μ^c es de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Sean $\lambda>0$ y $f\ge 0$. Definimos $E_\lambda=\{x\in\mathbb{R}^n : M_\mu^c f(x)>\lambda\}$. Sea $K\subset E_\lambda$ compacto. Para cada $x\in K$ existe un cubo Q_x centrado en x tal que

$$\frac{1}{\mu(Q_x)}\int_{Q_x}f(y)d\mu(y)>\lambda. \tag{2.7}$$

La familia $\{Q_x\}_{x\in K}$ está en las condiciones del *Lema de Besicovitch* para cubos, ya que K es acotado y los cubos están centradas en cada punto. Entonces existen $A_1,...,A_{c_n}$ familias formadas por cubos disjuntos cuya unión cubre todo K, donde c_n es una constante que solo depende de n. Supongamos en primer lugar $p=1$. Usando que cada familia A_j es disjunta, (2.7) y la caracterización (2.2) de la condición $A_1(\mu)$ tenemos,

$$
\begin{aligned}
u_\mu(K) &\le u_\mu\left(\bigcup_{j=1}^{c_n}\bigcup_{Q\in A_j}Q\right)\le\sum_{j=1}^{c_n}u_\mu\left(\bigcup_{Q\in A_j}Q\right)=\sum_{j=1}^{c_n}\sum_{Q\in A_j}u_\mu(Q)\\
&\le\sum_{j=1}^{c_n}\sum_{Q\in A_j}\frac{1}{\lambda}\frac{u_\mu(Q)}{\mu(Q)}\int_Q f(y)d\mu(y)=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{c_n}\sum_{Q\in A_j}\int_Q f(y)\frac{u_\mu(Q)}{\mu(Q)}d\mu(y)\\
&\le\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{c_n}\sum_{Q\in A_j}\int_Q f(y)Cv(y)d\mu(y)=\frac{C}{\lambda}\sum_{j=1}^{c_n}\int_{\bigcup_{Q\in A_j}Q}f(y)v(y)d\mu(y)\\
&\le\frac{C}{\lambda}\sum_{j=1}^{c_n}\int_{\mathbb{R}}f(y)v(y)d\mu(y)=\frac{c_nC}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}f(y)v(y)d\mu(y).
\end{aligned}
$$

Supongamos ahora $p > 1$. Entonces usando que cada familia A_j es disjunta, (2.7) y la condición $A_p(\mu)$ tenemos

$$\begin{aligned}
u_\mu(K) \leq & u_\mu\left(\bigcup_{j=1}^{c_n}\bigcup_{Q\in A_j} Q\right) \leq \sum_{j=1}^{c_n} u_\mu\left(\bigcup_{Q\in A_j} Q\right) = \sum_{j=1}^{c_n}\sum_{Q\in A_j} u_\mu(Q) \\
\leq & \sum_{j=1}^{c_n}\sum_{Q\in A_j} \frac{1}{\lambda^p} u_\mu(Q)\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q f(y)d\mu(y)\right)^p \\
= & \frac{1}{\lambda^p}\sum_{j=1}^{c_n}\sum_{Q\in A_j} \frac{u_\mu(Q)}{\mu(Q)^p}\left(\int_Q f(y)v(y)^{\frac{1}{p}}v(y)^{-\frac{1}{p}}d\mu(y)\right)^p \\
\leq & \frac{1}{\lambda^p}\sum_{j=1}^{c_n}\sum_{Q\in A_j} \frac{u_\mu(Q)}{\mu(Q)^p}\left(\int_Q v(y)^{1-p'}d\mu(y)\right)^{p-1}\int_Q f(y)^p v(y)d\mu(y) \\
= & \frac{1}{\lambda^p}\sum_{j=1}^{c_n}\sum_{Q\in A_j} \left(\frac{u_\mu(Q)}{\mu(Q)}\right)\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q v(y)^{1-p'}d\mu(y)\right)^{p-1}\int_Q f(y)^p v(y)d\mu(y) \\
\leq & \frac{C}{\lambda^p}\sum_{j=1}^{c_n}\sum_{Q\in A_j}\int_Q f(y)^p v(y)d\mu(y) = \frac{C}{\lambda^p}\sum_{j=1}^{c_n}\int_{\bigcup_{Q\in A_j} Q} f(y)^p v(y)d\mu(y) \\
\leq & \frac{C}{\lambda^p}\sum_{j=1}^{c_n}\int_{\mathbb{R}} f(y)^p v(y)d\mu(y) = \frac{c_n C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}} f(y)^p v(y)d\mu(y).
\end{aligned}$$

Luego para cada $1 \leq p < \infty$ hemos probado que se verifica

$$u_\mu(K) \leq \frac{c_n C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}} f(y)^p v(y)d\mu(y),$$

para cada compacto. Como u es localmente integrable entonces u_μ es una medida regular, y esto implica que

$$u_\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu^c f(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{c_n C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}} f(y)^p v(y)d\mu(y),$$

es decir, M_μ^c es de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Como μ verifica la condición de duplicación, entonces por la Proposición 1.9 tenemos que M_μ y M_μ^c son equivalentes, y por tanto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(x) > \lambda\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu^c f(x) > \frac{\lambda}{D(\mu)}\right\}.$$

Usando lo probado para M_μ^c obtenemos que

$$\begin{aligned}
u_\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(x) > \lambda\}\right) \leq & u_\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu^c f(x) > \frac{\lambda}{D(\mu)}\right\}\right) \\
\leq & \frac{c_n C D(\mu)^p}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}} f(y)^p v(y)d\mu(y)
\end{aligned}$$

para todo $\lambda > 0$. Luego, M_μ verifica la desigualdad de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$. □

Como consecuencia de este resultado, si $(u, v) \in A_p(\mu)$ entonces mediante una interpolación obtenemos que M_μ es de tipo fuerte (q, q) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$ para $q > p$.

Corolario 2.10. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación, $1 \leq p < \infty$, y $(u, v) \in A_p(\mu)$. Entonces para cada q con $p < q < \infty$, el operador maximal M_μ es acotado de $L^q(vd\mu)$ en $L^q(ud\mu)$, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_\mu f(x)|^q u(x) d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q v(x) d\mu(x) \tag{2.8}$$

para toda $f \in L^q(vd\mu)$.

Demostración: Sean $1 < p < \infty$, y $(u, v) \in A_p(\mu)$. Entonces por la caracterización anterior sabemos que M_μ es de tipo débil (p, p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$, es decir, aplica $L^p(vd\mu)$ en $L^{p,\infty}(ud\mu)$. Vamos a probar que M_μ también es acotado de $L^\infty(vd\mu)$ en $L^\infty(ud\mu)$. Esto es consecuencia de la siguiente cadena de igualdades y desigualdades,

$$\|M_\mu f\|_{L^\infty(ud\mu)} = \|M_\mu f\|_{L^\infty(\mu)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)} = \|f\|_{L^\infty(vd\mu)}.$$

Observemos que como $0 < u, v < \infty$ en casi todo punto, entonces las medidas $ud\mu, vd\mu$ y μ son equivalentes, y por tanto se tienen las igualdades anteriores. La desigualdad se probó en el Capítulo 1. Entonces, aplicando el *Teorema de interpolación de Marcinkiewicz* obtenemos (2.8) para todo q con $p < q < \infty$. □

Observación 2.11. El Teorema 2.9 junto con el Corolario 2.10 nos permiten generalizar a medidas de Borel con la propiedad de duplicación del *Teorema de Fefferman-Stein* [7]. Basta observar que $(u, M_\mu u) \in A_1(\mu)$, y entonces aplicando el Teorema 2.9 obtenemos

$$\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(y) > \lambda\}} u(x) d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M_\mu u(x) d\mu(x),$$

y aplicando el Corolario 2.10 tenemos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_\mu f(x)|^p u(x) d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M_\mu u(x) d\mu(x)$$

para todo $1 < p < \infty$.

Vamos a dar un ejemplo para ver que el Corolario 2.10 no se puede mejorar al caso $q = p$. Por tanto, $(u, v) \in A_p(\mu)$ no implica que M_μ sea de tipo fuerte (p, p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Luego, para caracterizar el tipo fuerte (p, p) nos tendremos que restringir a una clase de pesos más pequeña que $A_p(\mu)$.

Ejemplo 3 ([9])**.** *Consideremos μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Para $p = 1$ basta considerar $u = v = 1$, y sabemos que M no es de tipo fuerte $(1, 1)$, ya que si f es integrable y no es 0 en casi todo punto, entonces $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. Sea $p > 1$, tomemos $g \geq 0$, integrable, acotada y no nula en casi todo punto. Entonces, $Mg \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, y como g es integrable entonces Mg es finita en casi todo punto, ya que M es de tipo débil $(1, 1)$. Observemos que $(g, Mg) \in A_1$, y por la Proposición 2.8 tenemos $(g, Mg) \in A_1 \subset A_{p'}$. Aplicando la Proposición 2.6 tenemos que $((Mg)^{1-p}, g^{1-p}) \in A_p$. Tomemos entonces, $u = (Mg)^{1-p}$ y $v = g^{1-p}$, y tenemos un par de pesos $(u, v) \in A_p$ para el cual la desigualdad*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p u(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x) dx$$

no se da, ya que para $f = g$ tenemos $\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p u(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} Mg(x) dx = \infty$, y $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx < \infty$.

3. Caracterización de los pares de pesos (u, v) para los que M_μ es de tipo fuerte (p, p)

En esta sección vamos a estudiar los pares de pesos (u, v) para los que el operador M_μ es de tipo fuerte (p, p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$. En vista del Ejemplo 3 el par de pesos (u, v) tendrá que cumplir una condición más fuerte que $A_p(\mu)$. Esta caracterización se debe a *Sawyer* [31]. Nosotros vamos a seguir una demostración posterior de *Cruz-Uribe* [5], que es más simple.

Lema 2.12. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Sea $f \in L^1_{loc}(\mu)$ no negativa. Supongamos que para algún cubo Q y $\lambda > 0$ se tiene*

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f d\mu > \lambda, \tag{2.9}$$

entonces existe un cubo diádico P tal que $Q \subset 3P$, y una constante $C_{n,\mu} > 0$, que solo depende de n y de la constante de duplicación de μ, tales que

$$\frac{1}{\mu(P)} \int_P f d\mu > C_{n,\mu} \lambda.$$

Demostración: Sean Q y $\lambda > 0$ verificando (2.9), y sea $k \in \mathbb{Z}$ el único entero tal que $2^{k-1} < l(Q) \leq 2^k$. Entonces existen $P_1, ..., P_m$ $(1 \leq m \leq 2^n)$ cubos diádicos que intersecan el interior de Q con $l(P_j) = 2^k$ para cada $j \in \{1, ..., m\}$. Observemos que para cada j se tiene $|Q| \leq |P_j|$, y $P_j \cap \mathring{Q} \neq \emptyset$, entonces necesariamente $Q \subset 3P_j$. Además, alguno de estos cubos, al cual denotaremos por P, verifica

$$\int_P f d\mu > \frac{\lambda \mu(Q)}{2^n},$$

ya que en caso contrario, es decir, si $\int_{P_j} f d\mu \leq \frac{\lambda \mu(Q)}{2^n}$ para todo j, se tiene

$$\int_Q f d\mu \leq \int_{\bigcup_{j=1}^m P_j} f d\mu = \sum_{j=1}^m \int_{P_j} f d\mu \leq \sum_{j=1}^m \frac{\lambda \mu(Q)}{2^n} = \frac{m}{2^n} \lambda \mu(Q) \leq \lambda \mu(Q),$$

lo cual es una contradicción con (2.9). Ahora bien, como $2^{k-1} < l(Q) \leq 2^k = l(P)$ y $P \cap \mathring{Q} \neq \emptyset$, entonces $P \subset 6Q \subset 9Q$, y aplicando la condición de duplicación de μ tenemos $\mu(P) \leq D(\mu)^2 \mu(Q)$. Aplicando esta desigualdad vemos que P verifica lo deseado,

$$\int_P f d\mu > \frac{\lambda \mu(Q)}{2^n} \geq \frac{\lambda}{2^n D(\mu)^2} \mu(P).$$

□

Teorema 2.13. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Sean $1 < p < \infty$ y (u, v) un par de pesos. Denotemos $\sigma = v^{1-p'}$ donde p' es el exponente conjugado de p. Son equivalentes:*

1. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\int_Q |M_\mu(\sigma \chi_Q)(x)|^p u(x) d\mu(x) \leq C \int_Q \sigma(x) d\mu(x) < \infty \tag{$S_p(\mu)$}$$

para cada cubo Q.

2. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_\mu f(x)|^p u(x) d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x) d\mu(x), \tag{2.10}$$

para toda $f \in L^p(v d\mu)$.

Definición 2.14. Sean μ una medida de Borel regular en $\mathbb{R}^n$, y $1 < p < \infty$. Diremos que un par de pesos (u, v) verifica la condición $S_p(\mu)$, o simplemente, $(u, v) \in S_p(\mu)$ si verifica ($S_p(\mu)$).

Demostración: En primer lugar supongamos que se tiene (2.10). Entonces M_μ es de tipo débil (p, p) con respecto a las medidas $(u d\mu, v d\mu)$. Por el Teorema 2.9 tenemos que $(u, v) \in A_p(\mu)$, y por tanto $\int_Q \sigma(x) d\mu(x) < \infty$ para todo cubo Q. Ahora basta tomar $f = \sigma \chi_Q$ en (2.10) para obtener que $(u, v) \in S_p(\mu)$,

$$\begin{aligned}\int_Q |M_\mu(\sigma\chi_Q)(x)|^p u(x) d\mu(x) \leq & \int_{\mathbb{R}^n} |M_\mu(\sigma\chi_Q)(x)|^p u(x) d\mu(x) \\ \leq & C \int_Q |\sigma(x)|^p v(x) d\mu(x) = C \int_Q v(x)^{(1-p')p+1} d\mu(x) \\ = & C \int_Q v(x)^{1-p'} d\mu(x) = C \int_Q \sigma(x) d\mu(x).\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $(u, v) \in S_p(\mu)$. Consideremos para cada $N \in \mathbb{N}$ el operador maximal truncado

$$M_\mu^N f(x) = \sup_{x \in Q, l(Q) \leq 2^N} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)| d\mu(y),$$

donde el supremo se está tomando sobre todos los cubos Q con $x \in Q$ y lado menor o igual que 2^N. Observemos que $M_\mu^N f \uparrow M_\mu f$ cuando $N \to \infty$. Sea $f \in L^p(v d\mu)$; podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que f es acotada y de soporte compacto. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ definamos el conjunto

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^k < M_\mu^N f(x) \leq 2^{k+1}\}.$$

Para cada $x \in \Omega_k$ existe un cubo Q_x^k de lado menor que 2^N con $x \in Q_x^k$ y tal que

$$\frac{1}{\mu(Q_x^k)} \int_{Q_x^k} f(y) d\mu(y) > 2^k.$$

Aplicando el Lema 2.12 para cada $k \in \mathbb{Z}$ y cada $x \in \Omega_k$, obtenemos que existe un cubo diádico P_x^k, tal que $Q_x^k \subset 3P_x^k$ y

$$\frac{1}{\mu(P_x^k)} \int_{P_x^k} f(y) d\mu(y) > C_{n,\mu} 2^k.$$

Observemos que como los cubos Q_x^k son de lado acotado, entonces los P_x^k también lo son. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, $\{P_x^k\}_{x \in \Omega_k}$ es una familia de cubos diádicos de tamaño acotado, y por tanto podemos extraer una familia maximal disjunta, que denotaremos por $\{P_j^k\}_{j \in \mathbb{N}}$, tal que para cada $x \in \Omega_k$ se tiene $Q_x^k \subset 3P_j^k$ para un cierto j. Entonces, para cada $k \in \mathbb{Z}$ se verifica $\Omega_k \subset \bigcup_{j=1}^\infty 3P_j^k$.

Ahora para cada $k \in \mathbb{Z}$ definamos la familia de conjuntos $\{E_j^k\}$ por inducción, $E_1^k = 3P_1^k \cap \Omega_k$, $E_2^k = \left(3P_2^k \setminus 3P_1^k\right) \cap \Omega_k$, $E_3^k = \left(3P_3^k \setminus \left(3P_1^k \cup 3P_2^k\right)\right) \cap \Omega_k$,..., $E_j^k = \left(3P_j^k \setminus \left(\bigcup_{h<j} 3P_h^k\right)\right) \cap \Omega_k$. Entonces tenemos la siguiente partición,

$$\Omega_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^k.$$

Ahora observemos que, fijado $k \in \mathbb{Z}$, la familia $\{E_j^k\}$ es disjunta por definición, y además, como los conjuntos de la sucesión $\{\Omega_k\}$ son disjuntos, entonces la familia $\{E_j^k\}$ también es disjunta en el indice k. Entonces podemos estimar,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |M_\mu^N f(x)|^p u(x) d\mu(x) &= \sum_k \int_{\Omega_k} |M_\mu^N f(x)|^p u(x) d\mu(x) = \sum_{j,k} \int_{E_j^k} |M_\mu^N f(x)|^p u(x) d\mu(x) \\
&\leq \sum_{j,k} \int_{E_j^k} 2^{(k+1)p} u(x) d\mu(x) = 2^p \sum_{j,k} 2^{kp} u_\mu\left(E_j^k\right) \\
&= \frac{2^p}{(C_{n,\mu})^p} \sum_{j,k} u_\mu\left(E_j^k\right) \left(C_{n,\mu} 2^k\right)^p \\
&\leq \left(\frac{2}{C_{n,\mu}}\right)^p \sum_{j,k} u_\mu\left(E_j^k\right) \left(\frac{1}{\mu(P_j^k)} \int_{P_j^k} f(x) d\mu(x)\right)^p \\
&\leq \left(\frac{2D(\mu)}{C_{n,\mu}}\right)^p \sum_{j,k} u_\mu\left(E_j^k\right) \left(\frac{1}{\mu(3P_j^k)} \int_{3P_j^k} \sigma d\mu\right)^p \left(\frac{\int_{P_j^k} (f\sigma^{-1})\sigma d\mu}{\int_{3P_j^k} \sigma d\mu}\right)^p \\
&= \left(\frac{2D(\mu)}{C_{n,\mu}}\right)^p \int_X T(f\sigma^{-1})^p d\omega,
\end{aligned}$$

donde hemos dividido por $0 < \int_{P_j^k} \sigma d\mu \leq \int_{Q_x^k} \sigma d\mu < \infty$, debido a la condición $S_p(\mu)$. Definimos $X = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ y ω es una medida en X dada por la densidad respecto a la medida contadora

$$\omega(j,k) = u_\mu\left(E_j^k\right) \left(\frac{1}{\mu(3P_j^k)} \int_{3P_j^k} \sigma d\mu\right)^p,$$

y el operador T está definido para cada función h medible y no negativa como sigue,

$$Th(j,k) = \frac{1}{\sigma_\mu(3P_j^k)} \int_{P_j^k} h(x)\sigma(x) d\mu(x).$$

Entonces, si probamos que T es acotado de $L^p(\mathbb{R}^n, \sigma d\mu)$ en $L^p(X, \omega)$ habremos terminado, ya que en ese caso tendremos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |M_\mu^N f(x)|^p u(x) d\mu(x) &\leq \left(\frac{2D(\mu)}{C_{n,\mu}}\right)^p \int_X T(f\sigma^{-1})^p d\omega \\
&\leq \left(\frac{2D(\mu)}{C_{n,\mu}}\right)^p C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\sigma(x)^{-1}|^p \sigma(x) d\mu(x) \\
&= \left(\frac{2D(\mu)}{C_{n,\mu}}\right)^p C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x) d\mu(x),
\end{aligned}$$

y tomando límite cuando $N \to \infty$ obtenemos la desigualdad (2.10).

Probemos en primer lugar que T es acotado de $L^\infty(\mathbb{R}^n, \sigma d\mu)$ en $L^\infty(X, \omega)$. Sea $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \sigma d\mu)$, entonces

$$\begin{aligned}|Th(j,k)| =& \left| \frac{1}{\sigma_\mu(3P_j^k)} \int_{P_j^k} h(x)\sigma(x)d\mu(x) \right| \leq \frac{1}{\sigma_\mu(3P_j^k)} \int_{P_j^k} |h(x)|\sigma(x)d\mu(x) \\ \leq& \frac{\|h\|_{L^\infty(\sigma d\mu)}}{\sigma_\mu(3P_j^k)} \int_{P_j^k} \sigma(x)d\mu(x) = \|h\|_{L^\infty(\sigma d\mu)} \frac{\sigma_\mu(P_j^k)}{\sigma_\mu(3P_j^k)} \leq \|h\|_{L^\infty(\sigma d\mu)},\end{aligned}$$

luego $\|Th\|_{L^\infty(X,\omega)} \leq \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,\sigma d\mu)}$. Si probamos que T es de tipo débil $(1,1)$ habremos terminado, ya que aplicando el *Teorema de interpolación de Marcinkiewicz* tendremos que T es acotado de $L^p(\mathbb{R}^n, \sigma d\mu)$ en $L^p(X, \omega)$, para todo $p > 1$. Sean $h \geq 0$ acotada y de soporte compacto, $\lambda > 0$ y $F_\lambda = \{(j,k) \in X : Th(j,k) > \lambda\}$. Entonces como $E_j^k \subset 3P_j^k$ tenemos,

$$\begin{aligned}\omega(F_\lambda) =& \sum_{(j,k)\in F_\lambda} \omega(j,k) = \sum_{(j,k)\in F_\lambda} u_\mu\left(E_j^k\right) \left(\frac{1}{\mu(3P_j^k)} \int_{3P_j^k} \sigma d\mu \right)^p \\ =& \sum_{(j,k)\in F_\lambda} \int_{E_j^k} \left(\frac{1}{\mu(3P_j^k)} \int_{3P_j^k} \sigma d\mu \right)^p u(x)d\mu(x) \\ \leq& \sum_{(j,k)\in F_\lambda} \int_{E_j^k} M_\mu(\sigma\chi_{3P_j^k})(x)^p u(x)d\mu(x).\end{aligned}$$

Consideremos ahora $\{P_i\}$ la subcolección maximal disjunta de $\{P_j^k : (j,k) \in F_\lambda\}$. Entonces, como los E_j^k son disjuntos dos a dos, tenemos

$$\begin{aligned}\omega(F_\lambda) \leq& \sum_{(j,k)\in F_\lambda} \int_{E_j^k} M_\mu(\sigma\chi_{3P_j^k})(x)^p u(x)d\mu(x) \\ =& \sum_i \sum_{P_j^k \subset P_i} \int_{E_j^k} M_\mu(\sigma\chi_{3P_j^k})(x)^p u(x)d\mu(x) \\ \leq& \sum_i \sum_{P_j^k \subset P_i} \int_{3P_j^k} M_\mu(\sigma\chi_{3P_j^k})(x)^p u(x)d\mu(x) \\ \leq& \sum_i \int_{3P_i} M_\mu(\sigma\chi_{3P_i})(x)^p u(x)d\mu(x) \\ \leq& C \sum_i \int_{3P_i} \sigma(x)d\mu(x),\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $(u, v) \in S_p(\mu)$. Ahora bien, para cada i existe $(j,k) \in F_\lambda$ tal que $P_i = P_j^k$, entonces por la definición de F_λ tenemos

$$\int_{3P_i} \sigma(x)d\mu(x) < \frac{1}{\lambda} \int_{P_i} h(x)\sigma(x)d\mu(x).$$

Usando esto y que los $\{P_i\}$ son disjuntos podemos concluir,

$$\begin{aligned}\omega(F_\lambda) \leq& C \sum_i \int_{3P_i} \sigma(x)d\mu(x) < \frac{C}{\lambda} \sum_i \int_{P_i} h(x)\sigma(x)d\mu(x) \\ =& \frac{C}{\lambda} \int_{\bigcup_i P_i} h(x)\sigma(x)d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\sigma(x)d\mu(x).\end{aligned}$$

Por tanto T es de tipo débil $(1,1)$, y como hemos visto, esto implica (2.10). □

Como consecuencia del Teorema 2.9, el Teorema 2.13 y que el tipo fuerte (p,p) implica el tipo débil (p,p), obtenemos que $(u,v) \in S_p(\mu)$ implica $(u,v) \in A_p(\mu)$ para $1 < p < \infty$. Sin embargo, esto es más general, lo podemos probar para medidas de Borel regulares, sin suponer la propiedad de duplicación.

Corolario 2.15. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos, si $(u,v) \in S_p(\mu)$ entonces $(u,v) \in A_p(\mu)$.*

Demostración: Sean $(u,v) \in S_p(\mu)$ y Q un cubo en $\mathbb{R}^n$, entonces tenemos

$$\int_Q |M_\mu(\sigma\chi_Q)(x)|^p u(x)d\mu(x) \leq C \int_Q \sigma(x)d\mu(x) < \infty.$$

Ahora observemos que $\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \sigma(x)d\mu(x) \leq M_\mu(\sigma\chi_Q)(x)$ para todo $x \in Q$, y tenemos

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \sigma(x)d\mu(x)\right)^p \int_Q u(x)d\mu(x) \leq \int_Q |M_\mu(\sigma\chi_Q)(x)|^p u(x)d\mu(x) \leq C \int_Q \sigma(x)d\mu(x),$$

y por tanto, como $\int_Q \sigma(x)d\mu(x) < \infty$ obtenemos

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q u(x)d\mu(x)\right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \sigma(x)d\mu(x)\right)^{p-1} \leq C.$$

Luego $(u,v) \in A_p(\mu)$. □

El Ejemplo 3 nos dice que el recíproco del Corolario anterior no es cierto. La condición $S_p(\mu)$ es más exigente que $A_p(\mu)$.

4. Acotación de M_μ con pesos iguales

En lo que resta de capítulo vamos a desarrollar la teoría de pesos $A_p(\mu)$ para pesos iguales, es decir, para $(w,w) \in A_p(\mu)$. Haremos un abuso de notación, identificando w con (w,w), y escribiremos $w \in A_p(\mu)$ para referirnos a $(w,w) \in A_p(\mu)$. Para cada $w \in A_p(\mu)$ definimos la constante característica $A_p(\mu)$ de w como

$$[w]_{A_p(\mu)} = \sup_Q \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w(x)d\mu(x)\right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1},$$

para $p > 1$, y

$$[w]_{A_1(\mu)} = \sup_Q \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w(x)d\mu(x)\right) \left\|w^{-1}\right\|_{L^\infty(Q,\mu)}.$$

Con esta notación, podemos expresar la Proposición 2.6 de la siguiente forma.

Proposición 2.16. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Sea $1 < p < \infty$. Entonces, $w \in A_p(\mu)$, si y sólo si $\sigma = w^{1-p'} \in A_{p'}(\mu)$. Además, $[\sigma]_{A_{p'}(\mu)} = \left([w]_{A_p(\mu)}\right)^{p'-1}$.*

Para pesos iguales, la caracterización (2.3) de la condición $A_p(\mu)$ la podemos expresar de la siguiente forma. Si $1 \leq p < \infty$, entonces $w \in A_p(\mu)$ si y solo si para cada función no negativa y todo cubo Q se tiene,

$$(f_{Q,\mu})^p \leq \frac{[w]_{A_p(\mu)}}{w_\mu(Q)} \int_Q f(x)^p w(x) d\mu(x). \tag{2.11}$$

Como consecuencia de esta caracterización tenemos la siguiente propiedad de los pesos $A_p(\mu)$.

Proposición 2.17. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Sea $1 \leq p < \infty$. Si $w \in A_p(\mu)$, entonces la medida $wd\mu$ tiene la propiedad de duplicación.*

Demostración: Sean Q un cubo en $\mathbb{R}^n$, y $3Q$ su dilatado. Vamos a aplicar (2.11) a $f = \chi_Q$ y $3Q$,

$$(f_{3Q,\mu})^p = \left(\frac{\mu(Q)}{\mu(3Q)}\right)^p \leq \frac{[w]_{A_p(\mu)}}{w_\mu(3Q)} \int_{3Q} \chi_Q(x) w(x) d\mu(x) = [w]_{A_p(\mu)} \frac{w_\mu(Q)}{w_\mu(3Q)}.$$

Por tanto, para cada cubo Q tenemos

$$w_\mu(3Q) \leq [w]_{A_p(\mu)} \left(\frac{\mu(3Q)}{\mu(Q)}\right)^p w_\mu(Q) = D(\mu)^p [w]_{A_p(\mu)} w_\mu(Q).$$

Luego la medida $wd\mu$ verifica la propiedad de duplicación con constante $D(wd\mu) = D(\mu)^p [w]_{A_p(\mu)}$. □

Observación 2.18. Si μ tiene la propiedad de duplicación, en la definición de la condición $A_p(\mu)$ se pueden tomar equivalentemente bolas. Supongamos que w verifica la condición $A_p(\mu)$ con cubos, y sea B una bola en $\mathbb{R}^n$. Sea Q el cubo inscrito en B con lados paralelos a los ejes, entonces se verifica $Q \subset B \subset 3Q$. Como $w \in A_p(\mu)$, y $\sigma = w^{1-p'} \in A_{p'}(\mu)$, entonces las medidas $wd\mu$ y $\sigma d\mu$ tienen la propiedad de duplicación. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B w(x) d\mu(x)\right) \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B w(x)^{\frac{-1}{p-1}} d\mu(x)\right)^{p-1} &= \frac{1}{\mu(B)^p} w_\mu(B) \sigma_\mu(B)^{p-1} \\
&\leq \frac{1}{\mu(Q)^p} w_\mu(3Q) \sigma_\mu(3Q)^{p-1} \\
&\leq \frac{1}{\mu(Q)^p} D(wd\mu) D(\sigma d\mu)^{p-1} w_\mu(Q) \sigma_\mu(Q)^{p-1} \\
&= \frac{D(wd\mu) D(\sigma d\mu)^{p-1}}{\mu(Q)^p} \left(\int_Q w(x) d\mu(x)\right) \left(\int_Q w(x)^{\frac{-1}{p-1}} d\mu(x)\right)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Análogamente se prueba que la condición $A_p(\mu)$ con bolas implica la condición $A_p(\mu)$ con cubos.

Para pesos iguales las condiciones $A_p(\mu)$ y $S_p(\mu)$ son equivalentes, es decir, el recíproco del Corolario 2.15 es cierto. Esto fué observado por primera vez, para la medida de Lebesgue, por *Hunt, Kurtz* y *Neugebauer* [17]. Vamos a adaptar su prueba para medidas con la propiedad de duplicación.

Proposición 2.19. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Sea $1 < p < \infty$. Si $w \in A_p(\mu)$ entonces $(w, w) \in S_p(\mu)$.*

Demostración: Sean $w \in A_p(\mu)$, Q un cubo y denotemos $\sigma = w^{1-p'}$. Para cada cubo R contenido en Q podemos podemos escribir la condición $A_p(\mu)$ de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\mu(R)}\int_R \sigma(x)d\mu(x) \leq [w]_{A_p(\mu)}\left(\frac{\mu(R)}{w_\mu(R)}\right)^{\frac{1}{p-1}} = [w]_{A_p(\mu)}\left(\frac{1}{w_\mu(R)}\int_R w(x)^{-1}w(x)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Como $R \subset Q$, lo anterior es equivalentemente a

$$\frac{1}{\mu(R)}\int_R \sigma(x)\chi_Q(x)d\mu(x) \leq [w]_{A_p(\mu)}\left(\frac{1}{w_\mu(R)}\int_R w(x)^{-1}\chi_Q(x)w(x)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Entonces, para cada $x \in Q$ tenemos

$$\frac{1}{\mu(R)}\int_R \sigma(x)\chi_Q(x)d\mu(x) \leq [w]_{A_p(\mu)}M_{wd\mu}(w^{-1}\chi_Q)(x)^{\frac{1}{p-1}},$$

y tomando supremo sobre tales cubos R tenemos

$$\sup_{x\in R\subset Q}\frac{1}{\mu(R)}\int_R \sigma(x)\chi_Q(x)d\mu(x) \leq [w]_{A_p(\mu)}M_{wd\mu}(w^{-1}\chi_Q)(x)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{2.12}$$

Relacionemos $M_\mu(\sigma\chi_Q)(x)$ con el supremo anterior para cada $x \in Q$. Sea $x \in Q$ y $\widetilde{Q}$ un cubo en $\mathbb{R}^n$ tal que $x \in \widetilde{Q}$. Definamos $R = Q \cap \widetilde{Q}$, y observemos que R podría no ser un cubo, pero en general es un rectángulo. Distingamos dos casos:

- Si $l(\widetilde{Q}) \geq \frac{1}{2}l(Q)$, entonces como $x \in Q \cap \widetilde{Q}$ tenemos $Q \subset 3\widetilde{Q}$. Luego, aplicando la propiedad de duplicación de μ tenemos $\mu(Q) \leq \mu(3\widetilde{Q}) \leq D(\mu)\mu(\widetilde{Q})$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(\widetilde{Q})}\int_{\widetilde{Q}}\sigma\chi_Q d\mu \leq& \frac{D(\mu)}{\mu(Q)}\int_{Q\cap\widetilde{Q}}\sigma\chi_Q d\mu \leq \frac{D(\mu)}{\mu(Q)}\int_Q \sigma\chi_Q d\mu \\ \leq& D(\mu)\sup_{x\in R\subset Q}\frac{1}{\mu(R)}\int_R \sigma\chi_Q d\mu.\end{aligned}$$

- Si $l(\widetilde{Q}) \leq \frac{1}{2}l(Q)$, entonces tomemos un cubo S tal que $R \subset S \subset Q$ de lado el máximo de los lados de R. Como $S \cap \widetilde{Q} \neq \emptyset$ y $l(S) \leq l(\widetilde{Q})$, entonces $S \subset 3\widetilde{Q}$. Aplicando la propiedad de duplicación de μ tenemos $\mu(S) \leq \mu(3\widetilde{Q}) \leq D(\mu)\mu(\widetilde{Q})$. Por tanto,

$$\frac{1}{\mu(\widetilde{Q})}\int_{\widetilde{Q}}\sigma\chi_Q d\mu \leq \frac{D(\mu)}{\mu(S)}\int_R \sigma\chi_Q d\mu \leq \frac{D(\mu)}{\mu(S)}\int_S \sigma\chi_Q d\mu \leq D(\mu)\sup_{x\in R\subset Q}\frac{1}{\mu(R)}\int_R \sigma\chi_Q d\mu.$$

Hemos probado entonces que para todo cubo $\widetilde{Q}$ tal que $x \in \widetilde{Q}$ tenemos

$$\frac{1}{\mu(\widetilde{Q})}\int_{\widetilde{Q}}\sigma\chi_Q d\mu \leq D(\mu)\sup_{x\in R\subset Q}\frac{1}{\mu(R)}\int_R \sigma\chi_Q d\mu,$$

y por tanto, tomando supremo sobre tales cubos obtenemos

$$M_\mu(\sigma\chi_Q)(x) \leq D(\mu)\sup_{x\in R\subset Q}\frac{1}{\mu(R)}\int_R \sigma\chi_Q d\mu.$$

Luego, de la expresión (2.12) se deduce

$$M_\mu(\sigma\chi_Q)(x) \leq D(\mu)[w]_{A_p(\mu)} M_{wd\mu}(w^{-1}\chi_Q)(x)^{\frac{1}{p-1}}.$$

para todo $x \in Q$. Ahora bien, como μ tiene la propiedad de duplicación, entonces por la Proposición 2.17 tenemos que $wd\mu$ también verifica la propiedad de duplicación. Entonces por el Corolario 1.11 tenemos que $M_{wd\mu}$ es acotado en $L^{p'}(wd\mu)$ y podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\int_Q |M_\mu(\sigma\chi_Q)(x)|^p w(x)d\mu(x) \leq & D(\mu)^p \left([w]_{A_p(\mu)}\right)^p \int_Q |M_{wd\mu}(w^{-1}\chi_Q)(x)|^{p'} w(x)d\mu(x) \\
\leq & D(\mu)^p \left([w]_{A_p(\mu)}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} |M_{wd\mu}(w^{-1}\chi_Q)(x)|^{p'} w(x)d\mu(x) \\
\leq & D(\mu)^p \left([w]_{A_p(\mu)}\right)^p C \int_Q w(x)^{-p'} w(x)d\mu(x) \\
= & D(\mu)^p \left([w]_{A_p(\mu)}\right)^p C \int_Q \sigma(x)d\mu(x).
\end{aligned}$$

Por último observemos que la condición $A_p(\mu)$ implica que $\int_Q \sigma(x)d\mu(x) < \infty$ para cada cubo Q, luego $(w, w) \in S_p(\mu)$. □

Como consecuencia de la proposición anterior y del Teorema 2.13 podemos caracterizar los pesos w para los que M_μ es acotado en $L^p(wd\mu)$.

Teorema 2.20. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Sean $1 < p < \infty$ y w un peso. Denotemos $\sigma = w^{1-p'}$, donde p' es el exponente conjugado de p. Son equivalentes:*

1. *$w \in A_p(\mu)$.*
2. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_\mu f(x)|^p w(x)d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)d\mu(x) < \infty \tag{2.13}$$

   para toda $f \in L^p(wd\mu)$.

3. *Existe $C > 0$ tal que para cada $f \in L^p(wd\mu)$ se verifica*

$$\int_{\{y\in\mathbb{R}^n : M_\mu f(y) > \lambda\}} w(x)d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)d\mu(x)$$

   para todo $\lambda > 0$.

Demostración: En primer lugar observemos que 1 y 3 son equivalentes por el Teorema 2.9. Si suponemos 2 entonces se verifica 3 y tendríamos que $w \in A_p(\mu)$. Supongamos por último $w \in A_p(\mu)$, entonces por la Proposición 2.19 tenemos que $(w, w) \in S_p(\mu)$. Aplicando el Teorema 2.13 obtenemos (2.13). □

Para probar el teorema anterior ha sido clave el uso del Teorema 2.13. Sin embargo, se pueden dar pruebas del resultado anterior sin usar dicho resultado. En lo que resta de capítulo vamos a dar dos pruebas más de este resultado, en concreto de que $w \in A_p(\mu)$ implica (2.13). Estas demostraciones son interesantes por sí mismas, debido a la teoría que desarrollaremos para ellas.

5. Desigualdad de Hölder inversa

Como hemos probado en la Proposición 2.8, si $p \leq q$ entonces $A_p(\mu) \subset A_q(\mu)$, y por tanto tenemos la siguiente contención,

$$\bigcup_{p<q} A_p(\mu) \subset A_q(\mu). \tag{2.14}$$

Nuestro objetivo en esta sección es probar que se da la igualdad en (2.14), es decir, queremos ver que si $w \in A_p(\mu)$, entonces $w \in A_{p-\varepsilon}(\mu)$ para algún $\varepsilon > 0$. Esto será una consecuencia de la desigualdad de Hölder inversa. Comencemos con un lema previo.

Lema 2.21. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos. Sean $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p(\mu)$. Para cada $\alpha < 1$ existe un $\beta < 1$ tal que si Q es un cubo, y $S \subset Q$ con $\mu(S) \leq \alpha\mu(Q)$, entonces $w_\mu(S) \leq \beta w_\mu(Q)$.*

Demostración: Sean $\alpha < 1$ y Q un cubo. Para cada $S \subset Q$ tomemos $f = \chi_S$ en caracterización (2.11),

$$w_\mu(Q)\left(\frac{\mu(S)}{\mu(Q)}\right)^p \leq C w_\mu(S).$$

Esta desigualdad, que es válida para todo $S \subset Q$, se la aplicamos a $Q \setminus S$ y obtenemos

$$w_\mu(Q)\left(1 - \frac{\mu(S)}{\mu(Q)}\right)^p \leq C(w_\mu(Q) - w_\mu(S)),$$

para todo $S \subset Q$. Tomemos ahora $S \subset Q$ con $\mu(S) \leq \alpha\mu(Q)$. Reordenando la desigualdad anterior tenemos

$$\begin{aligned} w_\mu(S) \leq & \frac{1}{C}\left(C - \left(1 - \frac{\mu(S)}{\mu(Q)}\right)^p\right) w_\mu(Q) \\ \leq & \frac{1}{C}(C - (1-\alpha)^p) w_\mu(Q). \end{aligned}$$

Luego para cada $S \subset Q$ con $\mu(S) \leq \alpha\mu(Q)$ tenemos $w_\mu(S) \leq \beta w_\mu(Q)$, con $\beta = 1 - \frac{(1-\alpha)^p}{C}$. □

Teorema 2.22 (Desigualdad de Hölder inversa)**.** *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Sean $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p(\mu)$. Entonces existen $C, \varepsilon > 0$ (que dependen de p y w) tales que*

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{1+\varepsilon} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{C}{\mu(Q)}\int_Q w(x) d\mu(x), \tag{2.15}$$

para todo cubo Q.

Observación 2.23. La desigualdad contraria a (2.15) es la desigualdad de Hölder clásica con medida $\frac{d\mu}{\mu(Q)}$ y constante $C = 1$.

Demostración: Vamos a seguir la prueba del libro de *J. Duoandikoetxea* [6]. Sea $w \in A_p(\mu)$ con $p > 1$, y fijemos un cubo Q. Vamos a hacer la descomposición de Calderón-Zygmund (Teorema 1.33) de la función w a alturas $\lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_k < ....$ Fijaremos la sucesión $\{\lambda_k\}$ más adelante. Para cada $k \in \mathbb{N}$ obtenemos una familia de cubos diádicos disjuntos $\{Q_{k,j}\}$ con las siguientes propiedades:

- $w(x) \leq \lambda_k$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega_k$, donde $\Omega_k := \bigcup_j Q_{k,j}$.
- $\lambda_k < \dfrac{1}{\mu(Q_{k,j})} \displaystyle\int_{Q_{k,j}} w(x)d\mu(x) \leq D(\mu)\lambda_k$.
- $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$, ya que $\lambda_k < \lambda_{k+1}$.

Fijemos $Q_{k,j_0} \in \Omega_k$, entonces $Q_{k,j_0} \cap \Omega_{k+1}$ es la unión de ciertos cubos de Ω_{k+1}, denotemos a estos cubos $\{Q_{k+1,i} : i \in I\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mu(Q_{k,j_0} \cap \Omega_{k+1}) =& \mu\left(\bigcup_{i\in I} Q_{k+1,i}\right) = \sum_{i\in I} \mu(Q_{k+1,i}) < \frac{1}{\lambda_{k+1}} \sum_{i\in I} \int_{Q_{k+1,i}} w(x)d\mu(x)\\ =& \frac{1}{\lambda_{k+1}} \int_{\bigcup_{i\in I} Q_{k+1,i}} w(x)d\mu(x) = \frac{1}{\lambda_{k+1}} \int_{Q_{k,j_0}\cap\Omega_{k+1}} w(x)d\mu(x)\\ \leq& \frac{1}{\lambda_{k+1}} \int_{Q_{k,j_0}} w(x)d\mu(x) = \frac{D(\mu)\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \mu(Q_{k,j_0}).\end{aligned}$$

Tomemos la sucesión $\{\lambda_k\}$ tal que

$$\frac{D(\mu)\lambda_k}{\lambda_{k+1}} = \alpha,$$

para todo k, con $\alpha < 1$ arbitrario. Es decir, tomamos $\{\lambda_k\}$ una sucesión geométrica de razón $D(\mu)\alpha^{-1}$. Como $w \in A_p(\mu)$, entonces el Lema 2.21 nos asegura que que existe $\beta < 1$ asociado a α tal que $w_\mu(Q_{k,j_0} \cap \Omega_{k+1}) \leq \beta w_\mu(Q_{k,j_0})$. Si sumamos en j_0 obtenemos $w_\mu(\Omega_{k+1}) \leq \beta\mu(\Omega_k)$, y por tanto $w_\mu(\Omega_k) \leq \beta^k w_\mu(\Omega_0)$. Utilizando la desigualdad anterior, y que $w(x) \leq \lambda_k$ para casi todo $x \notin \Omega_k$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w(x)^{1+\varepsilon} d\mu(x) &= \frac{1}{\mu(Q)} \int_{Q\setminus\Omega_0} w(x)^{1+\varepsilon} d\mu(x) + \frac{1}{\mu(Q)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega_k\setminus\Omega_{k+1}} w(x)^{1+\varepsilon} d\mu(x)\\ &\leq \frac{\lambda_0^\varepsilon}{\mu(Q)} \int_{Q\setminus\Omega_0} w(x)d\mu(x) + \frac{1}{\mu(Q)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega_k\setminus\Omega_{k+1}} \lambda_{k+1}^\varepsilon w(x)d\mu(x)\\ &\leq \lambda_0^\varepsilon \frac{w_\mu(Q)}{\mu(Q)} + \frac{1}{\mu(Q)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{D(\mu)}{\alpha}\right)^{(k+1)\varepsilon} \lambda_0^\varepsilon w_\mu(\Omega_k)\\ &\leq \lambda_0^\varepsilon \left[\frac{w_\mu(Q)}{\mu(Q)} + \frac{1}{\mu(Q)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{D(\mu)}{\alpha}\right)^{(k+1)\varepsilon} \beta^k w_\mu(\Omega_0)\right]\\ &\leq \left[1 + \frac{D(\mu)}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{D(\mu)^\varepsilon}{\alpha^\varepsilon}\beta\right)^k\right] \lambda_0^\varepsilon \frac{w_\mu(Q)}{\mu(Q)}.\end{aligned}$$

Podemos tomar $\varepsilon > 0$ para que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{D(\mu)^\varepsilon}{\alpha^\varepsilon}\beta\right)^k$ converja, es decir, $\frac{D(\mu)^\varepsilon}{\alpha^\varepsilon}\beta < 1$. Denotemos por C' a la constante de dentro del corchete. Con esta elección de ε, que depende de α, β y $D(\mu)$, pero no del cubo Q, basta con elegir $\lambda_0 = \frac{w_\mu(Q)}{\mu(Q)}$, y obtenemos

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w(x)^{1+\varepsilon} d\mu(x) \leq C' \left(\frac{w_\mu(Q)}{\mu(Q)}\right)^\varepsilon \frac{w_\mu(Q)}{\mu(Q)} = C' \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w(x)d\mu(x)\right)^{1+\varepsilon},$$

luego elevando a $\frac{1}{1+\varepsilon}$ obtenemos (2.15) con constante $C = C'^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$. □

Observación 2.24. Si $w \in A_p(\mu)$ y ε es el exponente que nos da el teorema anterior, entonces la desigualdad de Hölder inversa (2.15) es cierta para todo exponente ε' con $\varepsilon' \leq \varepsilon$.

Proposición 2.25. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Sea $1 < p < \infty$. Si $w \in A_p(\mu)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\varepsilon}(\mu)$.*

Demostración: Sea $w \in A_p(\mu)$, entonces $\sigma = w^{1-p'} \in A_{p'}(\mu)$. Luego aplicando el Teorema 2.22 obtenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{(1-p')(1+\varepsilon)}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{C}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{1-p'}d\mu(x),$$

para todo cubo Q, con constante $C > 0$ independiente de Q. Sea $q > 1$ tal que $1 - q' = (1 - p')(1 + \varepsilon)$. Entonces $q < p$, y veamos que $w \in A_q(\mu)$. Para cada cubo Q tenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{1-q'}d\mu(x)\right)^{q-1} &= \left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{(1-p')(1+\varepsilon)}d\mu(x)\right)^{\frac{p-1}{1+\varepsilon}} \\ &\leq C\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1},\end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{1-q'}d\mu(x)\right)^{q-1} \\ &\qquad \leq C\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1} \\ &\qquad \leq C[w]_{A_p(\mu)}\end{aligned}$$

Luego, $[w]_{A_q(\mu)} \leq C[w]_{A_p(\mu)}$ y por tanto $w \in A_q(\mu)$. □

Como consecuencia de la proposición anterior tenemos que se da la igualdad en (2.14).

Corolario 2.26. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Entonces para cada $p > 1$ se tiene*

$$A_p(\mu) = \bigcup_{q<p} A_q(\mu). \tag{2.16}$$

Corolario 2.27. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Sea $1 < p < \infty$. Si $w \in A_p(\mu)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $w^{1+\varepsilon} \in A_p(\mu)$.*

Demostración: Como $w \in A_p(\mu)$, entonces existen $C', \varepsilon' > 0$ tales que

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{1+\varepsilon'}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon'}} \leq \frac{C'}{\mu(Q)}\int_Q w(x)d\mu(x),$$

para todo cubo Q. Como $w^{1-p'} \in A_{p'}(\mu)$, entonces existen $C'', \varepsilon'' > 0$ tales que

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{(1-p')(1+\varepsilon'')}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon''}} \leq \frac{C''}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{1-p'}d\mu(x),$$

para todo cubo Q. En vista de la Observación 2.24 tenemos que para $\varepsilon = \min(\varepsilon', \varepsilon'')$ se verifican las dos desigualdades anteriores. Entonces para cada cubo Q tenemos,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{1+\varepsilon}d\mu(x)\right)&\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{(1-p')(1+\varepsilon)}d\mu(x)\right)^{p-1}\\ &\leq\left[C'C''\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1}\right]^{1+\varepsilon}\\ &\leq (C'C'')^{1+\varepsilon}\left([w]_{A_p(\mu)}\right)^{1+\varepsilon}.\end{aligned}$$

Luego, $w^{1+\varepsilon} \in A_p(\mu)$. □

Corolario 2.28. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Sean $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p(\mu)$. Entonces existen $C > 0$ y $0 < \delta < 1$ tales que si Q es un cubo y $S \subset Q$ medible, entonces*

$$\frac{w_\mu(S)}{w_\mu(Q)} \leq C\left(\frac{\mu(S)}{\mu(S)}\right)^{\delta}. \tag{2.17}$$

Demostración: Sean $w \in A_p(\mu)$ y Q un cubo. Tomemos $S \subset Q$, y ε el dado por la desigualdad de Hölder inversa. Aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes conjugados $1+\varepsilon$ y $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ obtenemos,

$$\begin{aligned}w_\mu(S) = \int_Q \chi_S w(x)d\mu(x) &\leq \left(\int_Q w(x)^{1+\varepsilon}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\mu(S)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\\ &= \left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\mu(Q)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\mu(S)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\\ &\leq C w_\mu(Q)\left(\frac{\mu(S)}{\mu(Q)}\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Luego hemos obtenido (2.17) con $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < 1$. □

La Proposición 2.25 nos permite dar una demostración del Teorema 2.20 muy simple.

Demostración del Teorema 2.20: Solo tenemos que probar que si $w \in A_p(\mu)$ entonces M_μ es acotado en $L^p(wd\mu)$. Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mu)$, entonces por la Proposición 2.25 tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\varepsilon}(\mu)$. Entonces, aplicando el Teorema 2.9 tenemos que M_μ es de tipo débil $(p-\varepsilon, p-\varepsilon)$ con respecto a las medidas $(wd\mu, wd\mu)$. Sabemos que M_μ es acotado en $L^\infty(wd\mu)$. Por tanto, mediante una interpolación, obtenemos que M_μ es acotado en $L^p(wd\mu)$. □

La demostración anterior está basada en la propiedad $A_p(\mu) \Longrightarrow A_{p-\varepsilon}(\mu)$ para algún $\varepsilon > 0$. La primera demostración de este resultado evitaba esta propiedad usando el Teorema 2.13. En 2008, *Andrei K. Lerner* [20] publicó una demostración que evita tanto la propiedad $A_p(\mu) \Longrightarrow A_{p-\varepsilon}(\mu)$ como el Teorema 2.13. Además, es una demostración muy simple, y en la prueba se consigue una nueva caracterización de la condición $A_p(\mu)$.

Teorema 2.29. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Sean $1 < p < \infty$ y w un peso. Denotemos $\sigma = w^{1-p'}$, donde p' es el exponente conjugado de p. Son equivalentes:*

1. $w \in A_p(\mu)$.

2. *Existe* $C > 0$ *tal que para toda función* $f \in L^p(wd\mu)$ *se verifica*

$$M_\mu f(x) \leq C \left[M^c_{wd\mu}(M^c_{\sigma d\mu}(f\sigma^{-1})^{p-1}w^{-1})(x) \right]^{\frac{1}{p-1}},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

3. *Existe* $C > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_\mu f(x)|^p w(x) d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) d\mu(x) < \infty \tag{2.18}$$

para toda $f \in L^p(wd\mu)$.

Demostración: Sea $w \in A_p(\mu)$. Para cada cubo Q consideremos

$$A_p(Q) = \frac{w_\mu(Q)}{\mu(Q)} \left(\frac{\sigma_\mu(3Q)}{\mu(Q)} \right)^{p-1}.$$

Entonces tenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} A_p(Q) =& \frac{w_\mu(Q)}{\mu(Q)} \left(\frac{\sigma_\mu(3Q)}{\mu(Q)} \right)^{p-1} = \frac{\mu(3Q)^p}{\mu(Q)^p} \frac{w_\mu(Q)}{\mu(3Q)} \left(\frac{\sigma_\mu(3Q)}{\mu(3Q)} \right)^{p-1} \\ \leq& D(\mu)^p [w]_{A_p(\mu)}, \end{aligned}$$

para cada cubo Q. Luego, podemos escribir,

$$\begin{aligned} 1 =& A_p(Q)^{\frac{1}{p-1}} \frac{\mu(Q)}{\sigma_\mu(3Q)} \left(\frac{\mu(Q)}{w_\mu(Q)} \right)^{\frac{1}{p-1}} \\ \leq& D(\mu)^{\frac{p}{p-1}} \left([w]_{A_p(\mu)} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{\mu(Q)}{\sigma_\mu(3Q)} \left(\frac{\mu(Q)}{w_\mu(Q)} \right)^{\frac{1}{p-1}}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

para cada cubo Q. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, y $Q = Q(x,l)$ un cubo de lado l, centrado en x. Observemos que para cada $y \in Q$ se verifica $Q \subset Q(y,2l) \subset 3Q$. Denotemos $C = D(\mu)^{\frac{p}{p-1}} \left([w]_{A_p(\mu)} \right)^{\frac{1}{p-1}} = D(\mu)^{p'} \left([w]_{A_p(\mu)} \right)^{\frac{1}{p-1}}$. Sea $f \in L^p(wd\mu)$, entonces multiplicando el promedio $\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f| d\mu$ en la desigualdad (2.19) podemos estimar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f| d\mu \leq& C \frac{\mu(Q)}{\sigma_\mu(3Q)} \left(\frac{\mu(Q)}{w_\mu(Q)} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f| d\mu \\ =& C \left[\frac{\mu(Q)}{w_\mu(Q)} \left(\frac{1}{\sigma_\mu(3Q)} \int_Q |f| d\mu \right)^{p-1} \right]^{\frac{1}{p-1}} \\ \leq& C \left[\frac{1}{w_\mu(Q)} \int_Q \left(\frac{1}{\sigma_\mu(Q(y,2l))} \int_{Q(y,2l)} |f| \sigma^{-1} \sigma d\mu \right)^{p-1} d\mu(y) \right]^{\frac{1}{p-1}} \\ \leq& C \left[\frac{1}{w_\mu(Q)} \int_Q M^c_{\sigma d\mu}(f\sigma^{-1})(y)^{p-1} w(y)^{-1} w(y) d\mu(y) \right]^{\frac{1}{p-1}} \\ \leq& C \left[M^c_{wd\mu}(M^c_{\sigma d\mu}(f\sigma^{-1})^{p-1} w^{-1})(x) \right]^{\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}$$

Entonces, tomando supremo sobre todos los cubos centrados en x tenemos

$$M_\mu^c f(x) \leq C \left[M_{wd\mu}^c(M_{\sigma d\mu}^c(f\sigma^{-1})^{p-1}w^{-1})(x)\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Como μ tiene la propiedad de duplicación, entonces $M_\mu f(x) \leq D(\mu)M_\mu^c f(x)$, luego la expresión anterior nos queda

$$M_\mu f(x) \leq D(\mu)^{p'+1}\left([w]_{A_p(\mu)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left[M_{wd\mu}^c(M_{\sigma d\mu}^c(f\sigma^{-1})^{p-1}w^{-1})(x)\right]^{\frac{1}{p-1}},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, es decir hemos probado el punto 2. Ahora bien, como $M_{wd\mu}^c$ y $M_{\sigma d\mu}^c$ son maximales centrados, entonces el Teorema 1.13 nos dice que $M_{wd\mu}^c$ es acotado en $L^{p'}(wd\mu)$ y, $M_{\sigma d\mu}^c$ es acotado en $L^p(\sigma d\mu)$, con constantes C_1 y C_2 respectivamente, que solo dependen de n y p. Por tanto, si denotamos $C' = D(\mu)C$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |M_\mu f(x)|^p w(x)d\mu(x) \leq & C'^p \int_{\mathbb{R}^n} \left|M_{wd\mu}^c\left(w^{-1}M_{\sigma d\mu}^c(f\sigma^{-1})^{p-1}\right)(x)\right|^{\frac{p}{p-1}} w(x)d\mu(x)\\
= & C'^p \int_{\mathbb{R}^n} \left|M_{wd\mu}^c\left(w^{-1}M_{\sigma d\mu}^c(f\sigma^{-1})^{p-1}\right)(x)\right|^{p'} w(x)d\mu(x)\\
\leq & C'^p C_1 \int_{\mathbb{R}^n} \left|w(x)^{-1}M_{\sigma d\mu}^c(f\sigma^{-1})(x)^{p-1}\right|^{p'} w(x)d\mu(x)\\
= & C'^p C_1 \int_{\mathbb{R}^n} \left|M_{\sigma d\mu}^c(f\sigma^{-1})(x)\right|^{p'(p-1)} w(x)^{1-p'}d\mu(x)\\
= & C'^p C_1 \int_{\mathbb{R}^n} \left|M_{\sigma d\mu}^c(f\sigma^{-1})(x)\right|^{p} \sigma(x)d\mu(x)\\
\leq & C'^p C_1 C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x)\sigma^{-1}(x)\right|^{p} \sigma(x)d\mu(x)\\
= & C'^p C_1 C_2 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p} \sigma(x)^{1-p}d\mu(x)\\
= & C'^p C_1 C_2 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p} w(x)d\mu(x).
\end{aligned}$$

Luego M_μ es acotado en $L^p(wd\mu)$, con $\|M_\mu\|_{L^p(wd\mu)} \leq C_{n,p}D(\mu)^{p'+1}\left([w]_{A_p(\mu)}\right)^{\frac{1}{p-1}}$. La implicación restante se prueba de la misma forma que en las pruebas anteriores. □

En 1993, *S.M. Buckley* [3] probó que el exponente $\frac{1}{p-1}$ de $[w]_{A_p(\mu)}$ es el mejor posible en la desigualdad anterior.

6. Clase de pesos $A_\infty(\mu)$

Una de las consecuencias de la desigualdad de Hölder inversa es que para todo peso $w \in A_p(\mu)$ existen $C, \delta > 0$ tales que para cada cubo Q y cada $S \subset Q$, se verifica

$$\frac{w_\mu(S)}{w_\mu(Q)} \leq C\left(\frac{\mu(S)}{\mu(Q)}\right)^\delta.$$

Como la propiedad anterior la cumplen todos lo pesos que están en una clase $A_p(\mu)$, y tenemos la igualdad $A_p(\mu) = \cup_{q<p}A_q(\mu)$, esto sugiere definir una nueva clase de pesos.

Definición 2.30. Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos. Sea w un peso. Diremos que $w \in A_\infty(\mu)$ si existen $C, \delta > 0$ tales que para cada cubo Q y cada $S \subset Q$, se cumple

$$\frac{w_\mu(S)}{w_\mu(Q)} \leq C \left(\frac{\mu(S)}{\mu(Q)} \right)^\delta. \tag{2.20}$$

Observación 2.31. De la definición de $A_\infty(\mu)$ se sigue que si μ tiene la propiedad de duplicación y $w \in A_\infty(\mu)$, entonces $wd\mu$ tiene la propiedad de duplicación.

Con esta definición, el Corolario 2.28 nos está diciendo

$$\bigcup_{1 \leq p < \infty} A_p(\mu) \subset A_\infty(\mu). \tag{2.21}$$

Vamos a probar que se da la igualdad en la inclusión anterior, para ello necesitaremos el siguiente lema previo.

Lema 2.32. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y $w \in A_\infty(\mu)$. Para cada $\alpha < 1$ existe un $\beta < 1$ tal que para todo cubo Q y todo $S \subset Q$ con $w_\mu(S) \leq \alpha w_\mu(Q)$ se tiene $\mu(S) \leq \beta \mu(Q)$.*

Demostración: Sean $\alpha < 1$, Q un cubo y $S \subset Q$ con $w_\mu(S) \leq \alpha w_\mu(Q)$. Vamos a aplicar (2.20) a $Q \setminus S$,

$$1 - \frac{w_\mu(S)}{w_\mu(Q)} \leq C \left(1 - \frac{\mu(S)}{\mu(Q)} \right)^\delta.$$

Ahora, aplicando que $w_\mu(S) \leq \alpha w_\mu(Q)$, tenemos

$$1 - \alpha \leq C \left(1 - \frac{\mu(S)}{\mu(Q)} \right)^\delta.$$

Y despejando el término $\frac{\mu(S)}{\mu(Q)}$ nos queda,

$$\frac{\mu(S)}{\mu(Q)} \leq 1 - \left(\frac{1-\alpha}{C} \right)^{\frac{1}{\delta}}.$$

Luego $\mu(S) \leq \beta \mu(Q)$, con $\beta = 1 - \left(\frac{1-\alpha}{C}\right)^{\frac{1}{\delta}}$. □

Teorema 2.33. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Si $w \in A_\infty(\mu)$, entonces existe $p > 1$ tal que $w \in A_p(\mu)$.*

Demostración: Sea Q un cubo en $\mathbb{R}^n$. Vamos a hacer la descomposición de Calderón-Zygmund de la función w^{-1} a alturas $\lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_k < ...$, con respecto de la medida $wd\mu$, que tiene la propiedad de duplicación. Fijaremos la sucesión $\{\lambda_k\}$ más adelante. Para cada $k \in \mathbb{N}$ obtenemos una familia de cubos diádicos disjuntos $\{Q_{k,j}\}$ con las siguientes propiedades

- $w(x)^{-1} \leq \lambda_k$ para casi todo $x \notin \Omega_k := \bigcup_j Q_{k,j}$.
- $\lambda_k < \dfrac{1}{w_\mu(Q_{k,j})} \displaystyle\int_{Q_{k,j}} w(x)^{-1} w(x) d\mu(x) \leq D(wd\mu)\lambda_k$.
- $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$, ya que $\lambda_k < \lambda_{k+1}$.

Fijemos $Q_{k,j_0} \in \Omega_k$, entonces $Q_{k,j_0} \cap \Omega_{k+1}$ es la unión de ciertos cubos de Ω_{k+1}. Denotemos a estos cubos por $\{Q_{k+1,i} : i \in I\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} w_\mu(Q_{k,j_0} \cap \Omega_{k+1}) =& w_\mu\left(\bigcup_{i\in I} Q_{k+1,i}\right) = \sum_{i\in I} w_\mu(Q_{k+1,i}) < \frac{1}{\lambda_{k+1}} \sum_{i\in I} \int_{Q_{k+1,i}} w(x)^{-1} w(x) d\mu(x) \\ =& \frac{1}{\lambda_{k+1}} \int_{\bigcup_{i\in I} Q_{k+1,i}} w(x)^{-1} w(x) d\mu(x) = \frac{1}{\lambda_{k+1}} \int_{Q_{k,j_0}\cap\Omega_{k+1}} w(x)^{-1} w(x) d\mu(x) \\ \leq& \frac{1}{\lambda_{k+1}} \int_{Q_{k,j_0}} w(x)^{-1} w(x) d\mu(x) \leq D(wd\mu) \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} w_\mu(Q_{k,j_0}). \end{aligned}$$

Tomemos la sucesión $\{\lambda_k\}$ tal que

$$\frac{D(wd\mu)\lambda_k}{\lambda_{k+1}} = \alpha,$$

para un cierto $\alpha < 1$ arbitrario, es decir, tomamos $\{\lambda_k\}$ una sucesión geométrica de razón $D(wd\mu)\alpha^{-1}$. Como $w \in A_\infty(\mu)$, entonces el Lema 2.32 nos asegura que que existe $\beta < 1$ tal que $\mu(Q_{k,j_0} \cap \Omega_{k+1}) \leq \beta\mu(Q_{k,j_0})$. Si sumamos en j_0 obtenemos $\mu(\Omega_{k+1}) \leq \beta\mu(\Omega_k)$, y por tanto $\mu(\Omega_k) \leq \beta^k \mu(\Omega_0)$. Utilizando la desigualdad anterior, y que para casi todo $x \notin \Omega_k$, se tiene $w(x)^{-1} \leq \lambda_k$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_\mu(Q)} \int_Q (w^{-1})^{1+\varepsilon} w d\mu &= \frac{1}{w_\mu(Q)} \int_{Q\setminus\Omega_0} (w^{-1})^{1+\varepsilon} w d\mu + \frac{1}{w_\mu(Q)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega_k\setminus\Omega_{k+1}} (w^{-1})^{1+\varepsilon} w d\mu \\ &\leq \frac{\lambda_0^\varepsilon}{w_\mu(Q)} \int_{Q\setminus\Omega_0} w^{-1} w d\mu + \frac{1}{w_\mu(Q)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega_k\setminus\Omega_{k+1}} \lambda_{k+1}^\varepsilon w^{-1} w d\mu \\ &\leq \lambda_0^\varepsilon \frac{\mu(Q)}{w_\mu(Q)} + \frac{1}{w_\mu(Q)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{D(wd\mu)}{\alpha}\right)^{(k+1)\varepsilon} \lambda_0^\varepsilon \mu(\Omega_k) \\ &\leq \lambda_0^\varepsilon \left[\frac{\mu(Q)}{w_\mu(Q)} + \frac{1}{w_\mu(Q)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{D(wd\mu)}{\alpha}\right)^{(k+1)\varepsilon} \beta^k \mu(\Omega_0)\right] \\ &\leq \left[1 + \frac{D(wd\mu)}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{D(wd\mu)^\varepsilon}{\alpha^\varepsilon}\beta\right)^k\right] \lambda_0^\varepsilon \frac{\mu(Q)}{w_\mu(Q)}. \end{aligned}$$

Podemos tomar $\varepsilon > 0$ para que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{D(wd\mu)^\varepsilon}{\alpha^\varepsilon}\beta\right)^k$ converja, es decir, $\frac{D(wd\mu)^\varepsilon}{\alpha^\varepsilon}\beta < 1$. Denotemos por K a la constante de dentro del corchete. Con esta elección de ε, que depende de α, β y n, pero no del cubo Q, basta con elegir $\lambda_0 = \frac{\mu(Q)}{w_\mu(Q)}$, y obtenemos

$$\frac{1}{w_\mu(Q)} \int_Q w(x)^{-\varepsilon} d\mu(x) \leq K \left(\frac{\mu(Q)}{w_\mu(Q)}\right)^{1+\varepsilon},$$

equivalentemente,

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w(x) d\mu(x)\right)^\varepsilon \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w(x)^{-\varepsilon} d\mu(x)\right) \leq K.$$

Sea p tal que $\varepsilon = p' - 1$, entonces la expresión anterior nos queda,

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w(x) d\mu(x)\right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w(x)^{1-p'} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{1-p'}} \leq K^{\frac{1}{p'-1}}.$$

Luego $[w]_{A_p(\mu)} \leq K^{\frac{1}{p'-1}}$, y por tanto $w \in A_p(\mu)$. □

Por tanto, hemos probado la igualdad siguiente

$$A_\infty(\mu) = \bigcup_{1<p<\infty} A_p(\mu). \tag{2.22}$$

Observemos que si $w \in A_p(\mu) \subset A_\infty(\mu)$, entonces w verifica una desigualdad de Hölder inversa, ahora vamos a ver el recíproco.

Proposición 2.34. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos. Sea w un peso que cumple una desigualdad de Hölder inversa, es decir, existen $\varepsilon > 0$ y $C > 0$ tales que*

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{1+\varepsilon} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{C}{\mu(Q)}\int_Q w(x) d\mu(x),$$

para todo cubo Q. Entonces $w \in A_\infty(\mu)$.

Demostración: Sea Q un cubo y $S \subset Q$, vamos a usar la desigualdad de Hölder clásica con exponentes conjugados $1+\varepsilon$, y $\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$,

$$\begin{aligned} w_\mu(S) = \int_S w(x) d\mu(x) &\leq \mu(S)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left(\int_S w(x)^{1+\varepsilon} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \\ &\leq \mu(Q)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \mu(S)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{1+\varepsilon} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \\ &\leq \mu(Q)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \mu(S)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} C \frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x) d\mu(x) \\ &= C w_\mu(Q) \left(\frac{\mu(S)}{\mu(Q)}\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Luego $w \in A_\infty(\mu)$, con $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. □

Por lo tanto tenemos la siguiente caracterización de los pesos $A_\infty(\mu)$.

Teorema 2.35. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Entonces, son equivalentes:*

1. $w \in A_\infty(\mu)$.
2. $w \in \bigcup_{1<p<\infty} A_p(\mu)$.
3. *Existen $\varepsilon > 0$ y $C > 0$ tales que*

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{1+\varepsilon} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{C}{\mu(Q)}\int_Q w(x) d\mu(x),$$

para todo cubo Q.

7. Caracterización de pesos $A_1(\mu)$

En esta sección vamos a dar una caracterización constructiva de los pesos $A_1(\mu)$.

Teorema 2.36 ([10]). *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Si $w \in A_1(\mu)$, entonces existen $0 < \varepsilon < 1$, una función K no negativa tal que $K, K^{-1} \in L^\infty(\mu)$, y una función $f \in L^1_{loc}(\mu)$ con $M^c_\mu f < \infty$ en casi todo punto, tales que*

$$w(x) = K(x) M^c_\mu f(x)^\varepsilon. \tag{2.23}$$

Recíprocamente, dada una función no negativa K tal que $K, K^{-1} \in L^\infty(\mu)$ y dada una función $f \in L^1_{loc}(\mu)$ con $M^c_\mu f < \infty$ en casi todo punto. Si definimos w como en (2.23), entonces $w \in A_1$, y además satisface,

$$[w]_{A_1(\mu)} \leq \frac{C}{1-\varepsilon} \|K\|_\infty \left\|K^{-1}\right\|_\infty,$$

donde C es una constante que solo depende de la dimensión n y de $D(\mu)$.

Demostración: Sea $w \in A_1(\mu)$, entonces aplicando la desigualdad de Hölder inversa (Teorema 2.22) tenemos que existen $C, \gamma > 0$ tales que

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w(x)^{1+\gamma} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \leq \frac{C}{\mu(Q)} \int_Q w(x) d\mu(x) \leq C[w]_{A_1(\mu)} w(x), \tag{2.24}$$

para todo cubo Q y para todo $x \in Q \setminus E_Q$, donde E_Q es un subconjunto de Q de medida cero. Sean $\varepsilon = \frac{1}{1+\gamma}$ y $f(x) = w(x)^{1+\gamma} = w(x)^{\frac{1}{\varepsilon}}$. Sea N la unión de los E_Q tales que Q es un cubo con vértices en $\mathbb{Q}^n$, como es unión numerable de conjuntos de medida cero, entonces $\mu(N) = 0$. Por tanto, de (2.24) podemos deducir,

$$M_\mu f(x) \leq C^{1+\gamma} [w]^{1+\gamma}_{A_1(\mu)} f(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$. Y por tanto, $M^c_\mu f \leq C^{1+\gamma}[w]^{1+\gamma}_{A_1(\mu)} f$ en casi todo punto. Definamos

$$K(x) = \frac{f(x)^\varepsilon}{M^c_\mu f(x)^\varepsilon},$$

y observemos que $C^{-1}[w]^{-1}_{A_1} \leq K \leq 1$ en casi todo punto. Por tanto $K, K^{-1} \in L^\infty(\mu)$, y además se verifica $w(x) = K(x) M^c_\mu f(x)^\varepsilon$.
Recíprocamente, sean $w(x) = K(x) M^c_\mu f(x)^\varepsilon$ como en (2.23), y un cubo Q. Basta probar que para casi todo $x \in Q$ se tiene

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q M^c_\mu f(t)^\varepsilon d\mu(t) \leq \frac{C}{1-\varepsilon} M^c_\mu f(x)^\varepsilon, \tag{2.25}$$

ya que $K, K^{-1} \in L^\infty(\mu)$. Podemos escribir $f = f\chi_{3Q} + f\chi_{(3Q)^c}$. Como f es localmente integrable entonces $f\chi_{3Q} \in L^1(\mu)$. Aplicando el Teorema 1.12 tenemos que M^c_μ es de tipo

débil $(1,1)$, y por tanto tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q M_\mu^c(f\chi_{3Q})(x)^\varepsilon d\mu(x) =& \frac{\varepsilon}{\mu(Q)}\int_0^\infty \lambda^{\varepsilon-1}\mu(\{x\in Q : M_\mu^c(f\chi_{3Q})(x)>\lambda\})d\lambda \\
\leq& \frac{\varepsilon}{\mu(Q)}\int_0^\infty \lambda^{\varepsilon-1}\min\left(\mu(Q), \frac{c_n}{\lambda}\left\|f\chi_{3Q}\right\|_1\right)d\lambda \\
=& \frac{\varepsilon}{\mu(Q)}\int_0^{\frac{c_n}{\mu(Q)}\left\|f\chi_{3Q}\right\|_1} \lambda^{\varepsilon-1}\mu(Q)d\lambda \\
&+ \frac{\varepsilon}{\mu(Q)}\int_{\frac{c_n}{\mu(Q)}\left\|f\chi_{3Q}\right\|_1}^\infty c_n\lambda^{\varepsilon-2}\left\|f\chi_{3Q}\right\|_1 d\lambda \\
=& \frac{c_n^\varepsilon}{\mu(Q)^\varepsilon}\left\|f\chi_{3Q}\right\|_1^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\frac{c_n^\varepsilon}{\mu(Q)^\varepsilon}\left\|f\chi_{3Q}\right\|_1^\varepsilon \\
\leq& \frac{c_n^\varepsilon}{(1-\varepsilon)\mu(Q)^\varepsilon}\left\|f\chi_{3Q}\right\|_1^\varepsilon \\
=& \frac{c_n^\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(\frac{\mu(3Q)}{\mu(Q)}\right)^\varepsilon\left(\frac{1}{\mu(3Q)}\int_{3Q}|f(x)|d\mu(x)\right)^\varepsilon \\
\leq& \frac{c_n^\varepsilon D(\mu)^\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(M_\mu f(x)\right)^\varepsilon \leq \frac{c_n^\varepsilon D(\mu)^{2\varepsilon}}{1-\varepsilon}\left(M_\mu^c f(x)\right)^\varepsilon
\end{aligned}$$

para casi todo $x\in Q$. Acotemos ahora la parte correspondiente a $f\chi_{(3Q)^c}$. Sean $y\in Q$ y R un cubo con centro $y\in R$, y tal que $\int_R |f\chi_{(3Q)^c}(x)|d\mu(x)\neq 0$. Necesariamente $l(R)\geq l(Q)$ y por tanto $Q\subset 3R$. Por tanto, usando la propiedad de duplicación de μ tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(R)}\int_R |f\chi_{(3Q)^c}(t)|d\mu(t) \leq& \frac{\mu(3R)}{\mu(R)}\frac{1}{\mu(3R)}\int_{3R}|f\chi_{(3Q)^c}(t)|d\mu(t) \\
\leq& D(\mu)M_\mu f(x) \leq D(\mu)^2 M_\mu^c f(x),
\end{aligned}$$

para cada $x\in Q$. Por tanto, $M_\mu^c(f\chi_{(3Q)^c})(y)\leq D(\mu)^2 M_\mu^c f(x)$ para todo $x\in Q$, y esto implica

$$\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q M_\mu^c(f\chi_{(3Q)^c})(y)^\varepsilon d\mu(y) \leq D(\mu)^{2\varepsilon} M_\mu^c f(x)^\varepsilon.$$

Como $\varepsilon<1$, entonces aplicando que $M_\mu f(x)^\varepsilon \leq M_\mu(f\chi_{3Q})(x)^\varepsilon + M_\mu(f\chi_{(3Q)^c})(x)^\varepsilon$ hemos probado (2.25). □

8. Factorización de pesos $A_p(\mu)$

En 1972, *Muckenhoupt* [26] conjeturó que cada peso w de $A_p(\mu)$ se puede factorizar como uv^{1-p} donde $u,v\in A_1(\mu)$. Posteriormente, en 1980 Peter Jones lo demostró en [19]. Nosotros vamos a seguir una prueba posterior, que es más simple, y se debe a Coifman, Jones y Rubio de Francia [4], aunque la idea es de un artículo anterior de José L. Rubio de Francia [29].

Teorema 2.37. *Sean μ una medida de Borel regular con la propiedad de duplicación y $1\leq p<\infty$. Entonces $w\in A_p(\mu)$ si, y solo si, existen $u,v\in A_1(\mu)$ tales que $w=uv^{1-p}$.*

Demostración: Sean $u, v \in A_1(\mu)$, y veamos que $w = uv^{1-p} \in A_p(\mu)$. Sea Q un cubo en $\mathbb{R}^n$. Aplicando la condición $A_1(\mu)$ tenemos,

$$u(x)^{-1} \leq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q} u(x)^{-1} = \left(\operatorname*{ess\,ínf}_{x\in Q} u(x)\right)^{-1} \leq [u]_{A_1(\mu)} \left(\frac{u_\mu(Q)}{\mu(Q)}\right)^{-1},$$

$$v(x)^{-1} \leq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q} v(x)^{-1} = \left(\operatorname*{ess\,ínf}_{x\in Q} v(x)\right)^{-1} \leq [v]_{A_1(\mu)} \left(\frac{v_\mu(Q)}{\mu(Q)}\right)^{-1},$$

en casi todo punto $x \in Q$. Por lo tanto tenemos las estimaciones siguientes

$$u(x)^{1-p'} \leq \left([u]_{A_1(\mu)}\right)^{p'-1} \left(\frac{u_\mu(Q)}{\mu(Q)}\right)^{1-p'},$$

$$v(x)^{1-p} \leq \left([v]_{A_1(\mu)}\right)^{p-1} \left(\frac{v_\mu(Q)}{\mu(Q)}\right)^{1-p},$$

en casi todo $x \in Q$. Entonces, usando estas estimaciones tenemos,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu(Q)^p}\left(\int_Q uv^{1-p}d\mu\right)\left(\int_Q (uv^{1-p})^{1-p'}d\mu\right)^{p-1} = \frac{1}{\mu(Q)^p}\left(\int_Q uv^{1-p}d\mu\right)\left(\int_Q u^{1-p'}vd\mu\right)^{p-1}\\
\leq&\frac{1}{\mu(Q)^p}\left(\left([v]_{A_1(\mu)}\right)^{p-1}\left(\frac{v_\mu(Q)}{\mu(Q)}\right)^{1-p}\int_Q ud\mu\right)\left(\left([u]_{A_1(\mu)}\right)^{p'-1}\left(\frac{u_\mu(Q)}{\mu(Q)}\right)^{1-p'}\int_Q vd\mu\right)^{p-1}\\
=&\frac{[u]_{A_1(\mu)}[v]^{p-1}_{A_1(\mu)}}{\mu(Q)^p}\left(\frac{v_\mu(Q)}{\mu(Q)}\right)^{1-p}u_\mu(Q)\left(\frac{u_\mu(Q)}{\mu(Q)}\right)^{(1-p')(p-1)}v_\mu(Q)^{p-1}\\
=&\frac{[u]_{A_1(\mu)}[v]^{p-1}_{A_1(\mu)}}{\mu(Q)^p}\frac{v_\mu(Q)^{1-p}v_\mu(Q)^{p-1}}{\mu(Q)^{1-p}}\frac{u_\mu(Q)u_\mu(Q)^{-1}}{\mu(Q)^{-1}}\\
=&\frac{[u]_{A_1(\mu)}[v]^{p-1}_{A_1(\mu)}}{\mu(Q)^p}\frac{v_\mu(Q)^0}{\mu(Q)^{-p}}u_\mu(Q)^0 = [u]_{A_1(\mu)}[v]^{p-1}_{A_1(\mu)} < \infty.
\end{aligned}$$

Luego, $w = uv^{1-p} \in A_p(\mu)$ con $[w]_{A_p(\mu)} \leq [u]_{A_1(\mu)}[v]^{p-1}_{A_1(\mu)}$.

Recíprocamente, supongamos que $w \in A_p(\mu)$ con $1 < p < \infty$ (si $p = 1$ no hay nada que probar). Sea $\sigma = w^{1-p'}$, por la Proposición 2.16 tenemos que $\sigma \in A_{p'}(\mu)$. Por tanto, el Teorema 2.20 nos dice que M_μ es acotado en $L^p(wd\mu)$, y también es acotado en $L^{p'}(\sigma d\mu)$. Consideremos el operador R definido para cada función medible f de la siguiente forma $Rf = \left|w^{\frac{1}{p}}M_\mu(|f|^{p'}w^{-\frac{1}{p}})\right|^{\frac{1}{p'}}$. Veamos que R es acotado en $L^{pp'}(\mu)$, sea $f \in L^{pp'}(\mu)$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |Rf(x)|^{pp'}d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|w(x)^{\frac{1}{p}}M_\mu(|f|^{p'}w^{-\frac{1}{p}})(x)\right|^p d\mu(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left|M_\mu(|f|^{p'}w^{-\frac{1}{p}})(x)\right|^p w(x)d\mu(x)\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\left||f(x)|^{p'}w(x)^{-\frac{1}{p}}\right|^p w(x)d\mu(x)\\
&= C\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{pp'}d\mu(x).
\end{aligned}$$

Observemos que R es un operador sublineal. Trivialmente se verifica $R(\lambda f) = |\lambda|Rf$ para $\lambda \in \mathbb{R}$. El operador R es subaditivo, de hecho, vamos a probar que es numerablemente

subaditivo. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones, $x \in \mathbb{R}^n$ y Q un cubo con $x \in Q$. Entonces aplicando la desigualdad integral de Minkowski tenemos,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right|^{p'} w^{-\frac{1}{p}} d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f_n|^{p'} w^{-\frac{1}{p}} d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} M_\mu(|f_n|^{p'} w^{-\frac{1}{p}})(x)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

Tomando supremo sobre todos los cubos Q con $x \in Q$ obtenemos,

$$\left(M_\mu\left(\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right|^{p'} w^{-\frac{1}{p}}\right)(x)\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_\mu\left(|f_n|^{p'} w^{-\frac{1}{p}}\right)(x)^{\frac{1}{p'}},$$

y por tanto $R\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} R(f_n)$. Luego R es sublineal y numerablemente subaditivo.

Si definimos el operador R^* como $R^* f = \left|\sigma^{\frac{1}{p'}} M_\mu(|f|^p \sigma^{-\frac{1}{p'}})\right|^{\frac{1}{p}}$, entonces análogamente se prueba que R^* es sublineal, infinitamente subaditivo, y acotado en $L^{pp'}(\mu)$. Como consecuencia de la desigualdad triangular de Minkowski en $L^{pp'}(\mu)$ obtenemos que $R+R^* : L^{pp'}(\mu) \longrightarrow L^{pp'}(\mu)$ es acotado. Sean K la norma del operador $R + R^*$, y $h \in L^{pp'}(\mu)$. Definamos formalmente

$$H = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2K)^i}(R + R^*)^i(h),$$

donde $(R + R^*)^0(h) = h$ y $(R + R^*)^{i+1}(h) = (R + R^*)\left[(R + R^*)^i(h)\right]$. Observemos que $H \in L^{pp'}(\mu)$, ya que

$$\|H\|_{pp'} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2K)^i}\left\|(R + R^*)^i(h)\right\|_{pp'} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2K)^i} K^i \|h\|_{pp'} = \|h\|_{pp'} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2\|h\|_{pp'},$$

y por tanto la definición de H tiene sentido en casi todo punto. Como consecuencia de la definición de H se tiene que $H \geq 0$ y $H \geq |h|$ en casi todo punto. Además, de la sublinealidad para sumas infinitas de $R + R^*$ se deduce

$$\begin{aligned}(R + R^*)(H) =& (R + R^*)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2K)^i}(R + R^*)^i(h)\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2K)^i}(R + R^*)^{i+1}(h) \\ =& 2K \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2K)^{i+1}}(R + R^*)^{i+1}(h) \leq 2KH,\end{aligned}$$

en casi todo punto. Luego tenemos $R(H) \leq 2KH$ y $R^*(H) \leq 2KH$ en casi todo punto. De la definición de R y de la primera de las desigualdades anteriores se deduce $M_\mu(H^{p'} w^{-\frac{1}{p}}) \leq 2^{p'} K^{p'}(H^{p'} w^{-\frac{1}{p}})$ en casi todo punto. Y, análogamente con la otra desigualdad obtenemos $M_\mu(H^p \sigma^{-\frac{1}{p'}}) \leq 2^p K^p(H^p \sigma^{-\frac{1}{p'}})$. Si denotamos $u = H^p \sigma^{-\frac{1}{p'}}$ y $v = H^{p'} w^{-\frac{1}{p}}$, entonces las desigualdades anteriores nos dicen que $u, v \in A_1(\mu)$. Y además tenemos la descomposición deseada,

$$\begin{aligned}uv^{1-p} =& H^p \sigma^{-\frac{1}{p'}}\left(H^{p'} w^{-\frac{1}{p}}\right)^{1-p} = H^p w^{\frac{-1}{p-1}\frac{1}{p'}} H^{p'-pp'} w^{1-\frac{1}{p}} \\ =& H^p w^{\frac{1}{p}} H^{-p} w^{1-\frac{1}{p}} = H^{p-p} w^{\frac{1}{p}} w^{1-\frac{1}{p}} = w.\end{aligned}$$

□

9. Teoría de pesos $A_p(\mu)$ para medidas no doblantes

En este capítulo hemos visto que si μ es una medida con la propiedad de duplicación entonces son ciertos los resultados de la teoría de pesos de *Muckenhoupt* [26]. Esta teoría para medidas con la propiedad de duplicación fue estudiada por *Jawerth* [18] y por *Strömberg* y *Torchinsky* [36].
Para medidas sin la propiedad de duplicación, en el Capítulo 1 vimos que M_μ y M_μ^c pueden tener comportamientos muy diferentes: M_μ^c es de tipo débil $(1,1)$ y de tipo fuerte (p,p) para todo $p>1$, y sin embargo M_μ puede no serlo. Por lo tanto, tiene sentido tratar de desarrollar una teoría de pesos asociada al operador M_μ^c, donde μ es una medida de Borel que no es necesariamente doblante. Hay resultado parciales de esta teoría, suponiendo que μ satisface que las caras de los cubos tienen medida nula. Esta propiedad es más débil que la duplicación como muestra el Ejemplo 1. Para probarlo seguiremos la prueba del libro de *García-Cuerva* y *Rubio de Francia* [9], para lo cual necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.38. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Sean Q un cubo y R la mitad de Q, es decir, un intervalo contenido en Q teniendo un lado de longitud la mitad que los lados de Q y los demás lados de la misma longitud que Q, concretamente, si $Q=I\times[a,b]$, entonces $R=I\times[a,\frac{1}{2}(a+b))$. Entonces existe una constante $K(\mu)<1$ tal $\mu(R)\leq K(\mu)\mu(Q)$.*

Demostración: Sea R' la otra mitad de Q tal que $R\cup R'\subset Q$ y $R\cap R'=\emptyset$. Sea $Q'\subset R'$ un cubo tal que $R\subset 3Q'$, entonces

$$\mu(R)\leq\mu(3Q')\leq D(\mu)\mu(Q')\leq D(\mu)\mu(R')\leq D(\mu)(\mu(Q)-\mu(R)),$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $\mu(R\cup R')=\mu(R)+\mu(R')\leq\mu(Q)$. Reordenando los términos obtenemos $\mu(R)\leq K(\mu)\mu(Q)$, con $K(\mu)=\frac{D(\mu)}{1+D(\mu)}<1$. □

Teorema 2.39. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación y Q un cubo. Entonces $\mu(\partial Q)=0$.*

Demostración: Sea C una cara de Q, entonces podemos escribir $C=\bigcap_{j=1}^\infty R_j$, donde R_j es la mitad de R_{j-1} tal que $C\subset R_j$, y $R_1=Q$. Veamos que para cada j se tiene $\mu(R_{j+1})\leq K(\mu)\mu(R_j)$. Sea $\mathcal{D}_j(Q)$ el mallado diádico sobre Q de orden j. Consideremos la familia de cubos $\{Q_j^k\}_k$ de $\mathcal{D}_j(Q)$ que tienen intersección no vacía con R_{j+1}, y denotemos $R_{j+1}^k=R_{j+1}\cap Q_j^k$. Entonces observemos que $\{R_{j+1}^k\}_k$ es una partición disjunta de R_{j+1}, y además cada R_{j+1}^k es la mitad de Q_j^k. Entonces aplicando el lema previo tenemos,

$$\begin{aligned}\mu(R_{j+1})=&\mu\left(\bigcup_k R_{j+1}^k\right)=\sum_j\mu(R_{j+1}^k)\leq\sum_j K(\mu)\mu(Q_j^k)\\ =&K(\mu)\mu\left(\bigcup_k Q_j^k\right)=K(\mu)\mu\left(R_j\right).\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos $\mu(R_j)\leq K(\mu)^j\mu(Q)$, y entonces podemos concluir,

$$\mu(C)=\mu\left(\bigcap_{j=1}^\infty R_j\right)=\lim_{j\to\infty}\mu(R_j)\leq\lim_{j\to\infty}K(\mu)^j\mu(Q)=0,$$

ya que $K(\mu) < 1$. De aquí se sigue que $\mu(\partial Q) = 0$. Realmente hemos probado que cada hiperplano determinado por los ejes coordenados tiene medida μ cero. □

Como hemos visto esta condición es más débil que la propiedad de duplicación, de hecho, se puede probar que si μ es una medida continua (sin átomos) en $\mathbb{R}^n$ entonces existe un sistema ortonormal en $\mathbb{R}^n$ tal que $\mu(\partial Q) = 0$ para todo cubo con lados paralelos a los ejes coordenados. Bajo estas hipótesis *J. Orobitg* y *C. Pérez* [28] estudian la teoría de pesos $A_p(\mu)$. Vamos a enunciar su resultado principal y no incluiremos su demostración.

Teorema 2.40. *Sea μ una medida tal que $\mu(\partial Q) = 0$ para todo cubo Q.*

1. *Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p(\mu)$. Entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_\mu^c f(x)|^p w(x) d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) d\mu(x),$$

   para toda $f \in L^p(wd\mu)$.

2. *Si w verifica $A_1^s(\mu)$, es decir, existe $C > 0$ tal que para todo cubo Q se tiene*

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w d\mu \leq C \operatorname*{ess\,ínf}_{x \in Q} w(x),$$

   entonces existe $C > 0$ tal que para toda función $f \in L^1(wd\mu)$ se tiene

$$w_\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu^c f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x) d\mu(x),$$

   para todo $\lambda > 0$.

En este ambiente, la condición $A_1^s(\mu)$ no es equivalente a $M_\mu^c w(x) \leq C w(x)$ en casi todo punto, a esto se le llama $A_1^w(\mu)$. Se tiene la inclusión $A_1^s(\mu) \subset A_1^w(\mu)$, sin embargo, en [28] se da un ejemplo de un peso $w \in A_1^w(\mu) \setminus A_1^s(\mu)$.
La prueba de este resultado se hace de la forma habitual, probando primero la desigualdad de Hölder inversa y posteriormente la propiedad $A_p(\mu) \Longrightarrow A_{p-\varepsilon}(\mu)$. Sin embargo, en la siguiente sección veremos que esto no es cierto en general, es decir, para medidas con átomos la desigualdad de Hölder inversa y la propiedad $A_p(\mu) \Longrightarrow A_{p-\varepsilon}(\mu)$ fallan (véase [12]). Sin embargo, no se sabe si $w \in A_p(\mu)$ es una condición necesaria para la acotación de M_μ^c en $L^p(wd\mu)$. Se puede probar la siguiente condición más débil, existe $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{\mu(3Q)} \int_Q w(x) d\mu(x)\right) \left(\frac{1}{\mu(3Q)} \int_Q w(x)^{1-p'} d\mu(x)\right)^{p-1} \leq C,$$

para todo cubo Q. La caracterización de los pesos $A_1^s(\mu)$ y la factorización de pesos $A_p(\mu)$ tampoco se conocen en este ambiente.

9.1. Apertura a la izquierda de la clase $A_p(\mu)$

Por último, vamos a ver el ejemplo que se da en [12] para probar que la propiedad $A_p(\mu) \Longrightarrow A_{p-\varepsilon}(\mu)$ es falsa para medidas generales.

Teorema 2.41. *Sean μ la medida soportada en $\mathbb{N}$ (está definida en los Borelianos de $\mathbb{R}$ de forma que $\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = 0$) definida por $\mu(\{n\}) = n^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $w(n) = \frac{2^n}{n^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $w^{-1} \in A_2(\mu)$ y, para todo $q < 2$ se tiene $w^{-1} \notin A_q(\mu)$.*

Demostración: Veamos en primer lugar que $w \in A_1(\mu)$, es decir que existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{\sum_{j\in I}\mu(\{j\})}\sum_{j\in I} w(j)\mu(\{j\}) \leq C \inf_{j\in I} w(j) = C \min_{j\in I} w(j),$$

para todo intervalo finito $I \subset \mathbb{R}$. Observemos que basta probarlo para intervalos $I = [k, m]$ con $k, m \in \mathbb{N}$. Sea $I = [k, m]$ con $k, m \in \mathbb{N}$. Entonces tenemos,

$$\frac{1}{\sum_{j\in I}\mu(\{j\})}\sum_{j\in I} w(j)\mu(\{j\}) = \frac{1}{\sum_{j=k}^{m} j^j}\sum_{j=k}^{m} 2^j \leq \frac{2^{m+1}}{\sum_{j=k}^{m} j^j} \leq \frac{2^{m+1}}{m^m} = 2 \min_{j\in[k,m]} \frac{2^j}{j^j},$$

ya que la sucesión $w(n) = \frac{2^n}{n^n}$ es decreciente. Hemos probado entonces que $w \in A_1(\mu)$ con constante $C = 2$. Entonces aplicando el Teorema 2.37 (observemos que en la prueba de implicación que vamos a usar no se utilizó la propiedad de duplicación de μ) para $p = 2$ con $u = 1$ y $v = w$, tenemos que $w^{-1} = w^{1-2} \in A_2(\mu)$. Supongamos que existe $q < 2$ tal que $w^{-1} \in A_q(\mu)$; entonces existe $C > 0$ tal que para todo intervalo $I = [k, m]$ se verifica

$$\left(\sum_{j=k}^{m} w(j)^{-1}\mu(\{j\})\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=k}^{m} w(j)^{q'-1}\mu(\{j\})\right)^{\frac{1}{q'}} \leq C\sum_{j=k}^{m}\mu(\{j\}).$$

En particular, para $I = [n, n+1]$ con $n \in \mathbb{N}$, de la condición anterior nos queda

$$\left(\sum_{j=n}^{n+1} \frac{j^j}{2^j} j^j\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=n}^{n+1} \left(\frac{2^j}{j^j}\right)^{q'-1} j^j\right)^{\frac{1}{q'}} \leq C\sum_{j=n}^{n+1} j^j. \tag{2.26}$$

Si nos quedamos con un sumando en cada suma, podemos acotar inferiormente el término de la izquierda de la siguiente forma:

$$\left(\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{2^{n+1}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{2^n}{n^n}\right)^{q'-1} n^n\right)^{\frac{1}{q'}} \leq \left(\sum_{j=n}^{n+1} \frac{j^j}{2^j} j^j\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=n}^{n+1} \left(\frac{2^j}{j^j}\right)^{q'-1} j^j\right)^{\frac{1}{q'}}$$

Por tanto, de la expresión (2.26) se deduce

$$\left(\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{2^{n+1}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{2^{n(q'-1)}}{n^{n(q'-2)}}\right)^{\frac{1}{q'}} \leq C\sum_{j=n}^{n+1} j^j \leq 2C(n+1)^{n+1}.$$

Usando que $1 - \frac{1}{q'} = \frac{1}{q}$ tenemos que la expresión anterior es equivalente a

$$\frac{(n+1)^{(n+1)(\frac{2}{q}-1)}}{n^{n(1-\frac{2}{q'})}} \leq 2^{1+\frac{1}{q}} C.$$

Observemos ahora que $1 - \frac{2}{q'} = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{q}\right) = 1 - 2 + \frac{2}{q} = \frac{2}{q} - 1$. Luego la expresión anterior nos queda

$$(n+1)^{\frac{2}{q}-1}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{\frac{2}{q}-1} \leq 2^{1+\frac{1}{q}} C$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ llegamos a contradicción, ya que como $q < 2$, entonces $\frac{2}{q} - 1 > 0$ y por tanto $\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{2}{q}-1}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{\frac{2}{q}-1} = \infty$. Por lo tanto, para todo $q < 2$ se tiene $w^{-1} \notin A_q(\mu)$. □

En consecuencia, hemos probado que la propiedad $A_p(\mu) \Longrightarrow A_{p-\varepsilon}(\mu)$ es falsa para medidas generales.

Capítulo 3

Desigualdades con pesos para M_μ^+

Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. En el Capítulo 1 definimos los operadores maximales laterales,

$$M_\mu^+ f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{\mu([x, x+h))} \int_{[x,x+h)} |f(y)|\, d\mu(y),$$

y

$$M_\mu^- f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{\mu((x-h, x])} \int_{(x-h,x]} |f(y)|\, d\mu(y),$$

donde consideramos los cocientes como 0 si el denominador es 0. Hemos probado que estos operadores son de tipo débil $(1,1)$, y de tipo fuerte (p,p) para todo $p > 1$. En este capítulo vamos a estudiar desigualdades con pesos para estos operadores, es decir, vamos a estudiar las clases de pesos buenos para estos operadores.

Esta teoría de pesos fue desarrollada por *Sawyer* en 1986 para μ la medida de Lebesgue [32], posteriormente en 1990, por *Martín-Reyes, Ortega* y *de la Torre* para medidas absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue [23]. Finalmente en 1991, *Andersen* [1] caracterizó los pesos buenos para el operador M_μ^+, para medidas de Borel generales. Para ello no es necesario suponer ninguna condición de duplicación sobre la medida μ.

Al igual que en el capítulo anterior, estudiaremos tres cuestiones. En primer lugar, dado $1 \leq p < \infty$, caracterizaremos los pares de pesos (u, v) tales que los operadores M_μ^+ y M_μ^- son de tipo débil (p,p) con respecto al par de medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Veremos que para cada operador se puede determinar una condición, $A_p^+(\mu)$ y $A_p^-(\mu)$, para la que esto se cumple si y sólo si (u, v) es un par de pesos que verifica esta condición. El estudio de las clase $A_p^+(\mu)$ y $A_p^-(\mu)$ es lo primero que se abordará en este capítulo.

En segundo lugar, dado $1 < p < \infty$, caracterizaremos los pares de pesos (u, v) tales que los operadores M_μ^+ y M_μ^- son de tipo fuerte (p,p) con respecto al par de medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Veremos que para cada operador se puede determinar una condición, denotada por $S_p^+(\mu)$ y $S_p^-(\mu)$, respectivamente, para la que esto se cumple si y sólo si (u, v) es un par de pesos que verifica esta condición. Por último estudiaremos el problema anterior para el caso de dos pesos iguales, $u = v$, y veremos que en este caso es equivalente a que se verifique la correspondiente condición $A_p^+(\mu)$ o $A_p^-(\mu)$.

Estos resultados sobre maximales laterales nos permitirán extender los resultados del capítulo anterior, para $n = 1$, a medidas no necesariamente doblantes. El capítulo finaliza

con un resultado de factorización de pesos $A_p^+(\mu)$ similar al estudiado en el capítulo anterior.

1. Pares de pesos $A_p^+(\mu)$ y $A_p^-(\mu)$

Definición 3.1. Sean u y v dos pesos en $\mathbb{R}$.

- Si $1 < p < \infty$, decimos que (u, v) verifica la condición $A_p^+(\mu)$, o simplemente $(u, v) \in A_p^+(\mu)$, si existe $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1} \leq C \tag{3.1}$$

  para todos los números $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a < b < c$.

- Diremos que (u, v) verifica la condición $A_1^+(\mu)$, o simplemente $(u, v) \in A_1^+(\mu)$ si existe $C > 0$ tal que si $a < b < c$ se tiene

$$\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} u(x)d\mu(x) \leq Cv(x) \tag{3.2}$$

  para casi todo $x \in [b, c)$

- Si $1 < p < \infty$, decimos que (u, v) verifica la condición $A_p^-(\mu)$, o simplemente $(u, v) \in A_p^-(\mu)$, si existe $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1} \leq C \tag{3.3}$$

  para todos los números $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a < b < c$.

- Diremos que (u, v) verifica la condición $A_1^-(\mu)$, o simplemente $(u, v) \in A_1^-(\mu)$ si existe $C > 0$ tal que si $a < b < c$ se tiene

$$\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} u(x)d\mu(x) \leq Cv(x) \tag{3.4}$$

  para casi todo $x \in (a, b]$

Observación 3.2. En los productos de la definición anterior entendemos $0 \cdot \infty = 0$.

Observación 3.3. Tomando límites en (3.1) y (3.3), las condiciones se verifican tomando intervalos cerrados en a, o en c, o en ambos a la vez.

En primer lugar vamos a dar una caracterización equivalente de la condición $A_p^+(\mu)$.

Proposición 3.4. *Sea $1 \leq p < \infty$, entonces $(u, v) \in A_p^+(\mu)$ si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} f d\mu\right)^p \leq \frac{C}{u_\mu(a,b]}\int_{[b,c)} f^p v d\mu, \tag{3.5}$$

para toda función no negativa f, y todos los números $a < b < c$, donde en el cociente de (3.5) si $u_\mu(a, b] = 0$ usaremos las siguientes convenciones: $\frac{a}{0} = \infty$ para $a > 0$ y $\frac{0}{0} = 0$.

Demostración: Supongamos que $(u,v) \in A_p^+(\mu)$. Podemos suponer $u_\mu(a,b] > 0$, ya que en otro caso la desigualdad es cierta. Si $p = 1$ entonces,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} f d\mu =& \frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} f(x)v(x)v(x)^{-1}d\mu(x)\\ \leq& \frac{C}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} f(x)v(x)\frac{\mu(a,c)}{u_\mu(a,b]}d\mu(x)\\ =& \frac{C}{u_\mu(a,b]}\int_{[b,c)} f(x)v(x)d\mu(x).\end{aligned}$$

Supongamos ahora $p > 1$, entonces podemos escribir,

$$\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} f d\mu = \frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} f(x)v(x)^{\frac{1}{p}}v(x)^{-\frac{1}{p}}d\mu(x),$$

y aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes conjugados p y p' obtenemos,

$$\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} f d\mu\right)^p \leq \frac{1}{\mu(a,c)^p}\left(\int_{[b,c)} f(x)^p v(x)d\mu(x)\right)\left(\int_{[b,c)} v(x)^{-\frac{p'}{p}}d\mu(x)\right)^{\frac{p}{p'}}.$$

Observemos que $\frac{p'}{p} = p' - 1$, entonces aplicando que (u,v) verifica (3.1) obtenemos,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} f(x)d\mu(x)\right)^p \leq& \frac{1}{\mu(a,c)^p}\left(\int_{[b,c)} f(x)^p v(x)d\mu(x)\right)\frac{C}{u_\mu(a,b]}\mu(a,c)^p\\ =& \frac{C}{u_\mu(a,b]}\int_{[b,c)} f(x)^p v(x)d\mu(x).\end{aligned}$$

Supongamos ahora que (u,v) verifica (3.5), para $p > 1$. Podemos suponer $u_\mu(a,b] > 0$. Sea $\varepsilon > 0$, y consideremos $f = (v+\varepsilon)^{1-p'}$, entonces para cada $c > b$ tenemos,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} (v(x)+\varepsilon)^{1-p'}d\mu\right)^p \leq& \frac{C}{u_\mu(a,b]}\int_{[b,c)} (v(x)+\varepsilon)^{-p'}v(x)d\mu\\ \leq& \frac{C}{u_\mu(a,b]}\int_{[b,c)} (v(x)+\varepsilon)^{1-p'}d\mu(x).\end{aligned}$$

Esto es equivalente a

$$\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} (v(x)+\varepsilon)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1} \leq C.$$

Tomando límite cuando $\varepsilon \to 0^+$ obtenemos $(u,v) \in A_p^+(\mu)$. Supongamos ahora $p = 1$. Sea $a = \operatorname{ess\,ínf}_{x\in[b,c)} v(x)$. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $E \subset [b,c)$ con $\mu(E) > 0$ tal que $v(x) < \varepsilon + a$ para todo $x \in E$. Si tomamos $f = \chi_E$ en (3.5), entonces obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\mu(E)}{\mu(a,c)} \leq& \frac{C}{u_\mu(a,b]}\int_E v(x)d\mu(x)\\ \leq& \frac{C}{u_\mu(a,b]}\int_E (a+\varepsilon)d\mu(x) = C\frac{\mu(E)}{u_\mu(a,b]}(a+\varepsilon),\end{aligned}$$

y esto es equivalente a

$$\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} u d\mu \leq C(a+\varepsilon).$$

Tomando límite cuando $\varepsilon \to 0^+$ en la expresión anterior obtenemos que $(u,v) \in A_1^+(\mu)$. □

Análogamente se prueba la caracterización de $A_p^-(\mu)$.

Proposición 3.5. *Sea $1 < p < \infty$, entonces $(u,v) \in A_p^-(\mu)$ si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} f d\mu\right)^p \leq \frac{C}{u_\mu[b,c)}\int_{(a,b]} f^p v d\mu, \tag{3.6}$$

para toda función no negativa f, y todos $a < b < c$. Donde en el cociente de (3.6) si $u_\mu(a,b] = 0$ usaremos la siguiente convención, $\frac{a}{0} = \infty$ para $a > 0$ y $\frac{0}{0} = 0$.

Vamos a probar que las clases $A_p^+(\mu)$ también verifican la relación de inclusión que verifican las clases $A_p(\mu)$ (Teorema 2.8).

Proposición 3.6. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Si $1 \leq p < q < \infty$ entonces $A_p^+(\mu) \subset A_q^+(\mu)$.*

Demostración: Supongamos primero $p = 1$. Sea $(u,v) \in A_1^+(\mu)$, es decir, existe $C > 0$ tal que para todos $a < b < c$ se tiene

$$\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} u(x) d\mu(x) \leq C v(x) \tag{3.7}$$

para casi todo $x \in [b,c)$. Por tanto, para cada $q > 1$ tenemos,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} v(x)^{1-q'} d\mu(x)\right)^{q-1} \\
&\qquad = \left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} \left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} u(y)d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q-1}} v(x)^{1-q'} d\mu(x)\right)^{q-1} \\
&\qquad \leq \left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} (Cv(x))^{\frac{1}{q-1}} v(x)^{1-q'} d\mu(x)\right)^{q-1} \\
&\qquad = \left(\frac{C^{\frac{1}{q-1}}}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} v(x)^{\frac{-(1-q)(1-q')+1}{q-1}} d\mu(x)\right)^{q-1} \\
&\qquad = \left(\frac{C^{\frac{1}{q-1}}}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} d\mu(x)\right)^{q-1} \leq C.
\end{aligned}$$

Luego $A_1^+(\mu) \subset A_q^+(\mu)$. Supongamos ahora $p > 1$ y sea $(u,v) \in A_p^+(\mu)$. Entonces para cada $q > p$ tenemos $\frac{1-p'}{1-q'} > 1$, y apliquemos la desigualdad de Hölder con este exponente y medida $\frac{d\mu}{\mu(a,c)}$,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} v(x)^{1-q'} d\mu(x)\right)^{q-1} &\leq \left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} v(x)^{(1-q')\frac{1-p'}{1-q'}} d\mu(x)\right)^{\frac{1-q'}{1-p'}(q-1)} \\
&= \left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} v(x)^{1-p'} d\mu(x)\right)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Como consecuencia obtenemos,

$$\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} v(x)^{1-q'}d\mu(x)\right)^{q-1}$$
$$\leq \left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1}.$$

para todos los números $a, b, c \in \mathbb{R}$, luego $(u, v) \in A_q^+(\mu)$. □

El resultado es análogo para la clase $A_p^-(\mu)$.

Proposición 3.7. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Si $1 \leq p < q < \infty$ entonces $A_p^-(\mu) \subset A_q^-(\mu)$.*

Ahora vamos a probar otra caracterización equivalente de la condición $A_p^+(\mu)$, que será de especial interés en la próxima sección. Para ello necesitaremos dos lemas previos. Este resultado y los lemas previos se deben a *F.J. Martín-Reyes* y *A. de la Torre* [24].

Lema 3.8. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Entonces existe $\alpha \in [a, b)$ tal que $\mu[a, \alpha] \geq \frac{1}{2}\mu[a, b) \geq \mu[a, \alpha)$, y por tanto $\mu[\alpha, b) \geq \frac{1}{2}\mu[a, b)$.*

Demostración: Podemos suponer $\mu[a, b) > 0$, ya que en caso contrario cualquier $\alpha \in [a, b)$ nos vale. Definamos el conjunto

$$E = \left\{y \in [a, b) : \frac{1}{2}\mu[a, b) \leq \mu[a, y]\right\}.$$

Tenemos $E \neq \emptyset$ ya que $\lim_{y\to b} \mu[a, y) = \mu[a, b) > 0$; además, E es acotado inferiormente. Definamos pues $\alpha = \text{ínf}\, E$. Entonces existe una sucesión $\{c_n\} \subset E$ tal que $c_n \downarrow \alpha$. Como $c_n \in E$ para todo n, entonces tenemos

$$\frac{1}{2}\mu[a, b) \leq \mu[a, c_n]$$

para todo n. Tomando límite en la expresión anterior obtenemos $\frac{1}{2}\mu[a, b) \leq \mu[a, \alpha]$, luego $\alpha \in E$. Si $\alpha = a$, es claro que α cumple las condiciones requeridas. Supongamos $\alpha \neq a$. Por la definición de α, existe $\{d_n\}$ con $d_n \notin E$ para todo n, y $d_n \uparrow \alpha$ ($d_n < \alpha$ necesariamente). Como $d_n \notin E$, tenemos

$$\frac{1}{2}\mu[a, b) > \mu[a, d_n]$$

para todo n. Tomando límite obtenemos $\frac{1}{2}\mu[a, b) \geq \mu[a, \alpha)$. Por tanto, hemos probado que $\mu[a, \alpha] \geq \frac{1}{2}\mu[a, b) \geq \mu[a, \alpha)$. Como consecuencia, obtenemos

$$\mu[\alpha, b) = \mu[a, b) - \mu[a, \alpha) \geq \mu[a, b) - \frac{1}{2}\mu[a, b) = \frac{1}{2}\mu[a, b).$$

□

Lema 3.9. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\mu[a, b) > 0$. Entonces existe una sucesión (que podría ser finita) $\{x_k\}$ estrictamente decreciente tal que*

- $[a,b) = \bigcup_k [x_{k+1}, x_k)$ *salvo por un conjunto de medida cero.*
- $\mu[a, x_{k+1}] \geq \frac{1}{2}\mu[a, x_k)$ *para todo* k.
- $\mu[x_{k+1}, x_k) \geq \frac{1}{2}\mu[a, x_k)$ *(o, equivalentemente,* $\mu[a, x_{k+1}) \leq \frac{1}{2}\mu[a, x_k)$*) para todo* k.

Demostración: Sea $x_0 = b$. Supongamos que hemos elegido $x_0, ..., x_k$ con $k \geq 0$. Si $\mu[a, x_k) > 0$, entonces aplicamos el Lema 3.8 al intervalo $[a, x_k)$ y tomamos $x_{k+1} := \alpha$ (observemos que $\alpha < x_k$). Entonces el lema nos asegura que se verifican

- $\mu[a, x_{k+1}] \geq \frac{1}{2}\mu[a, x_k)$.
- $\mu[x_{k+1}, x_k) \geq \frac{1}{2}\mu[a, x_k)$.

Si $\mu[a, x_k) = 0$, entonces el proceso finaliza, y en este caso es obvio que $[a,b) = \bigcup_k [x_{k+1}, x_k)$ salvo por un conjunto de medida cero. Si el proceso continua infinitamente, entonces como los intervalos $[x_{k+1}, x_k)$ son disjuntos y μ es finita en conjuntos acotados, tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu[x_{k+1}, x_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} [x_{k+1}, x_k)\right) \leq \mu[a,b) < \infty,$$

y, por tanto, necesariamente $\lim_{k\to\infty} \mu[x_{k+1}, x_k) = 0$. Y como consecuencia de la desigualdad $\mu[x_{k+1}, x_k) \geq \frac{1}{2}\mu[a, x_k)$ obtenemos $\lim_{k\to\infty} \mu[a, x_k) = 0$. Ahora bien, como $\{x_k\}$ es una sucesión estrictamente decreciente y acotada inferiormente, entonces es convergente, sea $a' := \lim_{k\to\infty} x_k$. Entonces tenemos,

$$\mu[a, a'] = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} [a, x_k)\right) = \lim_{k\to\infty} \mu[a, x_k) = 0.$$

Esto termina la prueba, puesto que $[a,b) = [a, a'] \cup (\bigcup_k [x_{k+1}, x_k))$, y $\mu[a, a'] = 0$. □

De ahora en adelante usaremos la misma notación para intervalos que en la prueba del Teorema 1.18: dados tres números reales $a \leq b \leq c$, la notación $\{a, b]$ y $[b, c\}$ denotará a $(a, b]$ o $[a, b]$ y $[b, c)$ o $[b, c]$, respectivamente. Y $\{a, c\}$ denotará a la unión $\{a, b] \cup [b, c\}$.

Teorema 3.10 (Caracterizaciones de $A_p^+(\mu)$, [24])**.** *Sea* μ *una medida de Borel en* $\mathbb{R}$ *finita sobre conjuntos acotados. Sea* $1 < p < \infty$ *y* (u, v) *un par de pesos en* $\mathbb{R}$*. Son equivalentes:*

1. $(u, v) \in A_p^+(\mu)$.
2. *Se verifica*

$$\sup_{(a,b,c)\in T} \left(\frac{1}{\mu\{a, b]} \int_{\{a,b]} u(x)d\mu(x)\right) \left(\frac{1}{\mu[b, c\}} \int_{[b,c\}} v(x)^{1-p'} d\mu(x)\right)^{p-1} < \infty, \tag{3.8}$$

   donde T *es el conjunto de las ternas de números reales* $a < b < c$ *tales que*

$$\mu\{a, c\} > 0, \quad \mu\{a, b] \geq \frac{1}{2}\mu\{a, c\} \quad y \quad \mu[b, c\} \geq \frac{1}{2}\mu\{a, c\}.$$

3. *Existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\int_{[x,a)} v^{1-p'} d\mu \leq C\mu[x, a) \left(M^+_{ud\mu}(u^{-1}\chi_{[x,a)})(x)\right)^{p'-1}, \tag{3.9}$$

   para todos los números $x < a$.

4. *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$M_\mu^+(v^{1-p'}\chi_{[x,a)})(x) \leq C\left(M_{ud\mu}^+(u^{-1}\chi_{[x,a)})(x)\right)^{p'-1}, \tag{3.10}$$

para todos los números $x < a$.

Demostración:

1. Supongamos $(u, v) \in A_p^+(\mu)$ y veamos que se verifica (3.8). Sea $(a, b, c) \in T$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\mu\{a,b]}\int_{\{a,b]}u(x)d\mu(x)\right)&\left(\frac{1}{\mu[b,c\}}\int_{[b,c\}}v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1}\\ &\leq\left(\frac{2}{\mu\{a,c\}}\int_{\{a,b]}u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{2}{\mu\{a,c\}}\int_{[b,c\}}v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1}\\ &=2^p\left(\frac{1}{\mu\{a,c\}}\int_{\{a,b]}u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu\{a,c\}}\int_{[b,c\}}v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1}\\ &\leq 2^pC.\end{aligned}$$

2. Supongamos que (u, v) verifica (3.8). Si $\mu[x, a) = 0$, entonces trivialmente se verifica (3.9). Supongamos $\mu[x, a) > 0$. Sea $\{x_k\}$ la sucesión dada por el Lema 3.9 aplicado al intervalo $[x, a)$. Entonces como (u, v) cumple (3.8) tenemos

$$\begin{aligned}\int_{[x_{k+1},x_k)}v^{1-p'}d\mu &\leq C\mu[x_{k+1},x_k)\left(\frac{\mu[x,x_{k+1}]}{u_\mu[x,x_{k+1}]}\right)^{p'-1}\\ &=C\mu[x_{k+1},x_k)\left(\frac{1}{u_\mu[x,x_{k+1}]}\int_{[x,x_{k+1}]}u^{-1}ud\mu\right)^{p'-1}\\ &\leq C\mu[x_{k+1},x_k)\left(M_{ud\mu}^+(u^{-1}\chi_{[x,a)})(x)\right)^{p'-1}.\end{aligned}$$

   Como $[x, a) = \bigcup_k [x_{k+1}, x_k)$ salvo por un conjunto de medida nula, entonces sumando en k obtenemos

$$\int_{[x,a)}v^{1-p'}d\mu \leq C\mu[x,a)\left(M_{ud\mu}^+(u^{-1}\chi_{[x,a)})(x)\right)^{p'-1}.$$

3. Trivialmente (3.9) y (3.10) son equivalentes, con la misma constante.

4. Supongamos (3.9). Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a < b < c$. Podemos suponer, sin perdida de generalidad, que $\int_{[b,c)} v^{1-p'}d\mu > 0$ (esto implica que $\mu[b, c) > 0$). Definimos $\lambda_0 := \frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} v^{1-p'}d\mu$. Sea $0 < \lambda < \lambda_0$. Entonces para cada $x \in (a, b]$ se verifica

$$\begin{aligned}\lambda_0 =&\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)}v^{1-p'}d\mu \leq \frac{1}{\mu[x,c)}\int_{[x,c)}v^{1-p'}d\mu\\ \leq& C\left(M_{ud\mu}^+(u^{-1}\chi_{[x,c)})(x)\right)^{p'-1} \leq C\left(M_{ud\mu}^+(u^{-1}\chi_{(a,c)})(x)\right)^{p'-1}.\end{aligned}$$

Ahora bien, como $M^+_{ud\mu}$ es de tipo débil $(1,1)$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_{(a,b]} ud\mu &\leq \int_{\{x\in\mathbb{R}:M^+_{ud\mu}(u\chi_{(a,c)})(x)>\left(\frac{\lambda}{C}\right)^{p-1}\}} ud\mu \\ &\leq \left(\frac{C}{\lambda}\right)^{p-1}\int_{(a,c)} u^{-1}ud\mu = \left(\frac{C}{\lambda}\right)^{p-1}\mu(a,c).\end{aligned}$$

Así hemos obtenido que

$$\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} ud\mu\right)\lambda^{p-1} \leq C^{p-1}.$$

Tomando límite cuando $\lambda \to \lambda_0$ concluimos

$$\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} ud\mu\right)\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} v^{1-p'}d\mu\right)^{p-1} \leq C^{p-1},$$

luego hemos probado que $(u,v)\in A^+_p(\mu)$. □

Análogamente se prueba el resultado para M^-_μ.

Teorema 3.11 (Caracterizaciones de $A^-_p(\mu)$,[24])**.** *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Sea $1<p<\infty$ y (u,v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Son equivalentes:*

1. *$(u,v)\in A^-_p(\mu)$.*
2. *Se verifica*

$$\sup_{(a,b,c)\in T}\left(\frac{1}{\mu[b,c\}}\int_{[b,c\}} u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu\{a,b]}\int_{\{a,b]} v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1} < \infty, \quad (3.11)$$

donde T es el conjunto de las ternas de números reales $a<b<c$ tales que

$$\mu\{a,c\}>0, \quad \mu\{a,b]\geq\frac{1}{2}\mu\{a,c\} \quad y \quad \mu[b,c\}\geq\frac{1}{2}\mu\{a,c\}.$$

3. *Existe una constante $C>0$ tal que si $\mu(a,x]>0$ entonces*

$$\int_{(a,x]} v^{1-p'}d\mu \leq C\mu(a,x]\left(M^-_{ud\mu}(u^{-1}\chi_{(a,x]})(x)\right)^{p'-1}. \quad (3.12)$$

4. *Existe una constante $C>0$ tal que*

$$M^-_\mu(v^{1-p'}\chi_{(a,x]})(x) \leq C\left(M^-_{ud\mu}(u^{-1}\chi_{(a,x]})(x)\right)^{p'-1}. \quad (3.13)$$

para todos $a<x$.

Por último, vamos a dar una caracterización de la condición $A^+_1(\mu)$ (y la análoga para $A^-_1(\mu)$).

Teorema 3.12 (Caracterizaciones de $A^+_1(\mu)$)**.** *Sean μ una medida en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos compactos y (u,v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Son equivalentes:*

1. $(u,v) \in A_1^+(\mu)$.

2. *Existe* $C > 0$ *tal que*

$$M_\mu^- u(x) \leq Cv(x) \tag{3.14}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración: Supongamos $(u,v) \in A_1^+(\mu)$. Para cada $b, c \in \mathbb{R}$, con $b < c$, definimos

$$E_{b,c} = \left\{ x \in [b,c) : v(x) < \operatorname{ess}\inf_{y \in [b,c)} v(y) \right\}.$$

Por la definición de ínfimo esencial sabemos que $\mu(E_{b,c}) = 0$ y que $\operatorname{ess}\inf_{y\in[b,c)} v(y) \leq v(x)$ si $x \in [b,c) \setminus E_{b,c}$. Sea $E = \bigcup_{b,c\in\mathbb{Q},b<c} E_{b,c}$, como $\mathbb{Q}$ es numerable entonces $\mu(E) = 0$. En primer lugar veamos que $u(x) \leq Cv(x)$ en casi todo punto, donde C es la constante de la condición $A_1^+(\mu)$. Sean $L_\mu(u)$ y $L_\mu(v)$ los conjuntos de Lebesgue de u y v, respectivamente. Como (u,v) es un par de pesos, entonces $u, v \in L^1_{loc}(\mu)$, y por tanto $\mu\left(\mathbb{R} \setminus (L_\mu(u) \cup L_\mu(v))\right) = 0$. Sea $x \in L_\mu(u) \cap L_\mu(v)$, entonces para cada $a < x < c$ se verifica

$$\frac{1}{\mu(a,c)} \int_{(a,x]} u d\mu \leq C \operatorname{ess}\inf_{y\in[x,c)} v(y) \leq \frac{C}{\mu[x,c)} \int_{[x,c)} v d\mu.$$

Tomando límite cuando $c \to x$, entonces obtenemos

$$\frac{1}{\mu(a,x]} \int_{(a,x]} u d\mu \leq Cv(x),$$

y haciendo tender $a \to x$ obtenemos $u(x) \leq Cv(x)$. Sea $F = E \cup L_\mu(u) \cup L_\mu(v)$, entonces tenemos $\mu(F) = 0$. Vamos a probar que si $x \notin F$ entonces $M_\mu^- u(x) \leq 2Cv(x)$, donde C es la constante de la condición $A_1^+(\mu)$. Sean $x \notin F$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que $a < x$. Tomemos $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ dos sucesiones en $\mathbb{Q}$ tales que $b_n < x < c_n$, $b_n \uparrow c$ y $c_n \downarrow x$. Como $(u,v) \in A_1^+(\mu)$, entonces

$$\frac{1}{\mu(a,c_n)} \int_{(a,b_n]} u d\mu \leq C \operatorname{ess}\inf_{y\in[b_n,c_n)} v(y).$$

Observemos que $x \in [b_n, c_n)$ y, como $x \notin F$, entonces $x \notin E_{b_n,c_n}$. Luego, $\operatorname{ess}\inf_{y\in[b_n,c_n)} v(y) \leq v(x)$, y por tanto

$$\frac{1}{\mu(a,c_n)} \int_{(a,b_n]} u d\mu \leq Cv(x).$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ en la expresión anterior obtenemos

$$\frac{1}{\mu(a,x]} \int_{(a,x)} u d\mu \leq Cv(x).$$

Como $x \notin F$, entonces $x \notin L_\mu(u) \cup L_\mu(v)$, luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(a,x]} \int_{(a,x]} u d\mu =& \frac{1}{\mu(a,x]} \int_{(a,x)} u d\mu + \frac{1}{\mu(a,x]} \int_{\{x\}} u d\mu \\
=& \frac{1}{\mu(a,x]} \int_{(a,x)} u d\mu + \frac{\mu(\{x\})}{\mu(a,x]} u(x) \\
\leq& Cv(x) + Cv(x) = 2Cv(x).
\end{aligned}$$

Por tanto, tomando supremo sobre todos los $a < x$ tenemos $M_\mu^- u(x) \leq 2Cv(x)$ para todo $x \notin F$.

Recíprocamente, supongamos que existe $C > 0$ tal que $M_\mu^- u(x) \leq Cv(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Sean $a < b < c$. Si $x \in [b, c)$, entonces tenemos

$$\frac{1}{\mu(a,c)} \int_{(a,b]} u d\mu \leq \frac{1}{\mu(a,x]} \int_{(a,x]} u d\mu.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{\mu(a,c)} \int_{(a,b]} u d\mu \leq M_\mu^- u(x) \leq Cv(x)$$

para casi todo $x \in [b, c)$. □

Teorema 3.13 (Caracterizaciones de $A_1^-(\mu)$)**.** *Sean μ una medida en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos compactos y (u, v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Son equivalentes:*

1. $(u, v) \in A_1^-(\mu)$.
2. *Existe $C > 0$ tal que*
$$M_\mu^+ u(x) \leq Cv(x) \tag{3.15}$$
para casi todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Caracterización de los pares de pesos (u, v) para los que M_μ^+ es de tipo débil (p, p)

En esta sección vamos a estudiar el primer problema que nos planteábamos en la introducción del capítulo, vamos a caracterizar los pares de pesos (u, v) tales que el operador M_μ^+ es de tipo débil (p, p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$, donde μ es una medida con la propiedad de duplicación. Veremos que esto será equivalente a que $(u, v) \in A_p^+(\mu)$. Vamos a dar dos demostraciones de este resultado, la primera usando el Teorema 3.10, que será válida para $1 < p < \infty$. Y seguidamente adaptaremos a medidas de Borel la prueba de *Martín-Reyes* [22].

Teorema 3.14 ([24])**.** *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Sean $1 < p < \infty$, y (u, v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Son equivalentes:*

1. $(u, v) \in A_p^+(\mu)$.
2. *Existe una constante C tal que para toda f medible y todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene*
$$M_\mu^+ f(x) \leq C \left(M_{ud\mu}^+ (|f|^p v u^{-1}) \right)(x) \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.16}$$
3. *M_μ^+ es de tipo débil (p, p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que para cada $f \in L^p(vd\mu)$ se verifica,*
$$\int_{\{y \in \mathbb{R} : M_\mu^+ f(y) > \lambda\}} u(x) d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x) d\mu(x), \tag{3.17}$$
para todo $\lambda > 0$.

Demostración:

1. Supongamos $(u,v) \in A_p^+(\mu)$. Sea $\{x_k\}$ la sucesión dada por el Lema 3.9 en el intervalo $[x,a)$ para la medida $ud\mu$. Si la sucesión es finita y tiene $N+1$ elementos, definimos $x_k := x$ para todo $k \geq N+2$. Aplicando la condición $A_p^+(\mu)$, en la versión (3.8), y que $[x,a) = \bigcup_k [x_{k+1}, x_k)$ salvo por un conjunto de medida cero, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{[x,a)} |f|d\mu &= \sum_k \int_{[x_{k+1},x_k)} |f|d\mu = \sum_k \int_{[x_{k+1},x_k)} |f| v^{\frac{1}{p}} v^{-\frac{1}{p}} d\mu \\ &\leq \sum_k \left(\int_{[x_{k+1},x_k)} |f|^p v d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{[x_{k+1},x_k)} v^{1-p'} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C^{1/p} \sum_k \left(\frac{1}{u_\mu([x_{k+2}, x_{k+1}])} \int_{[x_{k+1},x_k)} |f|^p v d\mu \right)^{1/p} \mu\left([x_{k+2}, x_k)\right).\end{aligned}$$

Ahora observemos que debido a las propiedades de la sucesión $\{x_k\}$ tenemos,

$$\begin{aligned}u_\mu\left([x_{k+2}, x_{k+1}]\right) &= u_\mu\left([x, x_{k+1}]\right) - u_\mu\left([x, x_{k+2})\right) \\ &\geq \frac{1}{2} u_\mu\left([x, x_k)\right) - \frac{1}{2} u_\mu\left([x, x_{k+1})\right) \\ &= \frac{1}{2} u_\mu\left([x_{k+1}, x_k)\right) \geq \frac{1}{4} u_\mu\left([x, x_k)\right).\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{[x,a)} |f|d\mu &\leq C^{1/p} \sum_k \left(\frac{1}{u_\mu([x_{k+2}, x_{k+1}])} \int_{[x_{k+1},x_k)} |f|^p v d\mu \right)^{1/p} \mu\left([x_{k+2}, x_k)\right) \\ &\leq C^{1/p} \sum_k \left(\frac{4}{u_\mu([x, x_k))} \int_{[x,x_k)} |f|^p v u^{-1} u d\mu \right)^{1/p} \mu\left([x_{k+2}, x_k)\right) \\ &\leq (4C)^{1/p} \left(M^+_{ud\mu}(|f|^p v u^{-1}))(x) \right)^{\frac{1}{p}} \sum_k \mu\left([x_{k+2}, x_k)\right) \\ &\leq 2(4C)^{1/p} \left(M^+_{ud\mu}(|f|^p v u^{-1}))(x) \right)^{\frac{1}{p}} \mu([x,a)).\end{aligned}$$

Y por tanto,

$$M^+_\mu f(x) \leq 2(4C)^{\frac{1}{p}} \left(M^+_{ud\mu}(|f|^p v u^{-1}))(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. Supongamos 2 y veamos que M^+_μ es de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Para ello, basta usar que $M^+_{ud\mu}$ es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a las medidas $(ud\mu, ud\mu)$, y concluimos

$$\begin{aligned}\int_{\{y \in \mathbb{R} : M^+_\mu f(y) > \lambda\}} u(x) d\mu(x) &\leq \int_{\{y \in \mathbb{R} : M^+_{ud\mu}(|f|^p v u^{-1})(y) > \left(\frac{\lambda}{C}\right)^p\}} u(x) d\mu(x) \\ &\leq \frac{C^p}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x) u(x)^{-1} u(x) d\mu(x) \\ &= \frac{C^p}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x) d\mu(x).\end{aligned}$$

3. Supongamos que M_μ^+ es de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$, y veamos que $(u,v) \in A_p^+(\mu)$. Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$ con $a<b<c$ y tal que $\int_{[b,c)} v^{1-p'}d\mu > 0$. Entonces si le aplicamos la desigualdad de tipo débil (p,p) a la función $f_N = \text{mín}\{v^{1-p'}\chi_{[b,c)}, N\}$, $N \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}: M_\mu^+ f_N(x)>\lambda\}} ud\mu \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{[b,c)} |f_N|^p v d\mu \tag{3.18}$$

para todo $\lambda > 0$. Observemos que si $x \in (a,b]$ entonces tenemos,

$$\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} f_N d\mu \leq \frac{1}{\mu[x,c)}\int_{[x,c)} f_N\chi_{[b,c)}d\mu \leq M_\mu^+(f_N)(x).$$

Sea $\lambda_0 = \frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} f_N d\mu$, entonces tomando $0<\lambda<\lambda_0$ en (3.18) tenemos la inclusión $(a,b] \subset \{x\in\mathbb{R} : M_\mu^+ f_N(x) \geq \lambda\}$, y por tanto,

$$\int_{(a,b]} ud\mu \leq \int_{\{x\in\mathbb{R}: M_\mu^+ f_N(x)\geq\lambda\}} ud\mu \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{[b,c)} |f_N|^p v d\mu.$$

Tomando límite cuando $\lambda \to \lambda_0$ en la expresión anterior y reordenando llegamos a

$$\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} ud\mu\right)\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} f_N d\mu\right)^p \leq C\int_{[b,c)} |f_N|^p v d\mu.$$

Como $f_N \uparrow v^{1-p'}\chi_{[b,c)}$, tomando límite en la última desigualdad obtenemos que $(u,v) \in A_p^+(\mu)$. □

Para la segunda prueba necesitaremos un lema similar al Lema 3.8.

Lema 3.15. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Sean $a,b \in \mathbb{R}$ tales que $a<b$. Entonces existe $\alpha \in (a,b)$ tal que $\mu[\alpha,b\} \geq \frac{1}{2}\mu(a,b\} \geq \mu(\alpha,b\}$, y por tanto $\mu(a,\alpha] \geq \frac{1}{2}\mu(a,b\}$.*

Demostración: Podemos suponer $\mu(a,b\} > 0$, ya que en caso contrario no hay nada que probar. Definamos el conjunto

$$E = \left\{y \in (a,b) : \frac{1}{2}\mu(a,b\} \leq \mu[y,b\}\right\}.$$

Tenemos $E \neq \emptyset$ ya que $\mu(a,b\} > 0$. Además E es acotado superiormente. Definamos entonces $\alpha = \sup E$. Entonces existe una sucesión $\{c_n\} \subset E$ tal que $c_n \uparrow \alpha$. Como $c_n \in E$ para todo n, entonces tenemos

$$\frac{1}{2}\mu(a,b\} \leq \mu[c_n,b\}$$

para todo n. Tomando límite en la expresión anterior obtenemos $\frac{1}{2}\mu(a,b\} \leq \mu[\alpha,b\}$. Supongamos que $\alpha \neq b$. Por la definición de α, existe $\{d_n\} \subset (a,b)$ con $d_n \notin E$ y $d_n \downarrow \alpha$. Como $d_n \notin E$ y $d_n \in (a,b)$ para todo n, tenemos

$$\frac{1}{2}\mu(a,b\} > \mu[d_n,b\}$$

para todo n. Tomando límite obtenemos $\frac{1}{2}\mu(a,b\} \geq \mu(\alpha,b\}$. Por tanto hemos probado, $\mu[\alpha,b\} \geq \frac{1}{2}\mu(a,b\} \geq \mu(\alpha,b\}$. Como consecuencia obtenemos,

$$\mu(a,\alpha] = \mu(a,b\} - \mu(\alpha,b\} \geq \mu(a,b\} - \frac{1}{2}\mu(a,b\} = \frac{1}{2}\mu(a,b\}.$$

Si $\alpha = b$, el intervalo $(a,b\}$ es necesariamente $(a,b]$. En este caso, la desigualdad

$$\mu(a,\alpha] \geq \frac{1}{2}\mu(a,b\} = \frac{1}{2}\mu(a,b].$$

es trivialmente cierta porque $\alpha = b$. □

Y de la misma forma que obtuvimos el Lema 3.9 a partir del Lema 3.8, como consecuencia de este lema obtenemos el siguiente resultado.

Lema 3.16. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Sean $a,b \in \mathbb{R}$ tales que $\mu[a,b\} > 0$. Entonces existe una sucesión (que podría ser finita) $\{x_k\}$ estrictamente creciente tal que*

- $(a,b\} = \bigcup_k (x_k, x_{k+1}]$ *salvo por un conjunto de medida cero.*
- $\mu[x_{k+1},b\} \geq \frac{1}{2}\mu(x_k,b\}$ *para todo k.*
- $\mu(x_k,x_{k+1}] \geq \frac{1}{2}\mu(x_k,b\}$ *para todo k.*

Demostración: Sea $x_0 = a$. Supongamos que hemos elegido $x_0,...,x_k$ con $k \geq 0$. Si $\mu(x_k,b\} > 0$, entonces aplicamos el Lema 3.16 al intervalo $(x_k,b\}$ y tomamos $x_{k+1} := \alpha$. Entonces el lema nos asegura que se verifican

- $\mu[x_{k+1},b\} \geq \frac{1}{2}\mu(x_k,b\}$.
- $\mu(x_k,x_{k+1}] \geq \frac{1}{2}\mu(x_k,b\}$.

Si $\mu(x_k,b\} = 0$, entonces el proceso finaliza, y en este caso es obvio que $(a,b\} = \bigcup_k (x_k,x_{k+1}]$ salvo por un conjunto de medida cero. Si el proceso continua infinitamente, entonces como los intervalos $(x_k,x_{k+1}]$ son disjuntos y μ es finita en conjuntos acotados, tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(x_k,x_{k+1}] = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(x_k,x_{k+1}]\right) \leq \mu(a,b\} < \infty,$$

y, por tanto, necesariamente $\lim_{k\to\infty} \mu(x_k,x_{k+1}] = 0$. Y como consecuencia de la desigualdad $\mu(x_k,x_{k+1}] \geq \frac{1}{2}\mu(x_k,b\}$ obtenemos $\lim_{k\to\infty} \mu(x_k,b\} = 0$. Ahora bien, como $\{x_k\}$ es una sucesión estrictamente creciente y acotada superiormente, entonces es convergente, sea $b' := \lim_{k\to\infty} x_k$. Entonces tenemos,

$$\mu[b',b\} = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}(x_k,b\}\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(x_k,b\} = 0.$$

Como $(a,b\} = (\bigcup_k (x_k,x_{k+1}]) \cup [b',b\}$, y $\mu[b',b\} = 0$, hemos terminado. □

Teorema 3.17. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Sean $1 \leq p < \infty$, y (u,v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Son equivalentes:*

1. $(u,v) \in A_p^+(\mu)$.

2. M_μ^+ *es de tipo débil* (p,p) *con respecto a las medidas* $(ud\mu, vd\mu)$, *es decir, existe* $C>0$ *tal que para toda* $f \in L^p(vd\mu)$ *se verifica*

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}:M_\mu^+ f(x)>\lambda\}} ud\mu \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}} |f|^p v d\mu,$$

para todo $\lambda > 0$.

Demostración: Supongamos $(u,v) \in A_p^+(\mu)$. Sea $f>0$ acotada y de soporte compacto. Sean $\lambda>0$ y $N\in\mathbb{Z}$. Consideremos $E_{\lambda,N} = \{x > N : M_\mu^+ f(x) > \lambda\}$. Como vimos en la demostración del Teorema 1.18 podemos descomponer $E_{\lambda,N} = \bigcup_n (a_n, b_n\}$, donde cada intervalo es de longitud acotada y para cada $(a,b\}$ componente de $E_{\lambda,N}$ se verifica

$$\int_{[x,b\}} f d\mu \geq \lambda\mu[x,b\} > 0,$$

para todo $x \in (a,b\}$. Veamos que en la propiedad anterior podemos tomar intervalos de la forma $(x,b\}$. Sea $x\in(a,b)$, entonces existe $\{c_n\} \subset (a,b\}$ tal que $c_n \downarrow x$, y como cada $c_n \in (a,b\}$ tenemos

$$\int_{[c_n,b\}} f d\mu \geq \lambda\mu[c_n,b\}.$$

Tomando límite cuando $n\to\infty$ en la expresión anterior obtenemos

$$\int_{(x,b\}} f d\mu \geq \lambda\mu(x,b\} > 0.$$

Luego,

$$\int_{(x,b\}} f d\mu \geq \lambda\mu(x,b\} > 0. \tag{3.19}$$

para todo $x\in(a,b)$. Apliquemos el Lema 3.16 al intervalo $(a,b\}$ con la medida $fd\mu$, obtenemos entonces una sucesión $\{x_k\}$ estrictamente creciente tal que

1. $(a,b\} = \bigcup_k (x_k, x_{k+1}]$ salvo por un conjunto de $fd\mu$-medida cero. Observemos que como $f>0$, entonces las medidas $fd\mu$ y μ son equivalentes.

2. $\displaystyle\int_{[x_{k+1},b\}} f d\mu \geq \frac{1}{2}\int_{(x_k,b\}} f d\mu$ para todo k.

3. $\displaystyle\int_{(x_k,x_{k+1}]} f d\mu \geq \frac{1}{2}\int_{(x_k,b\}} f d\mu$ para todo k.

Aplicando (3.19) con $x = x_{k-1}$ y usando las propiedades de la sucesión $\{x_k\}$ tenemos,

$$\begin{aligned}\lambda \leq& \frac{1}{\mu(x_{k-1},b\}}\int_{(x_{k-1},b\}} f d\mu \leq \frac{2}{\mu(x_{k-1},b\}}\int_{[x_k,b\}} f d\mu \\ \leq& \frac{4}{\mu(x_{k-1},b\}}\int_{[x_k,x_{k+1}]} f d\mu.\end{aligned}$$

Para $p=1$, multiplicando la expresión anterior por $\int_{(x_{k-1},x_k]} u d\mu$ y aplicando la condición $A_1^+(\mu)$ tenemos,

$$\begin{aligned}\int_{(x_{k-1},x_k]} u d\mu \leq & \frac{4}{\lambda \mu(x_{k-1},b\}} \left(\int_{[x_k,x_{k+1}]} f d\mu\right)\left(\int_{(x_{k-1},x_k]} u d\mu\right)\\ = & \frac{4}{\lambda}\int_{[x_k,x_{k+1}]} f(x)\left(\frac{1}{\mu(x_{k-1},b\}}\int_{(x_{k-1},x_k]} u d\mu\right) d\mu(x)\\ \leq & \frac{4}{\lambda}\int_{[x_k,x_{k+1}]} f(x)\left(\frac{1}{\mu(x_{k-1},x_{k+1}]}\int_{(x_{k-1},x_k]} u d\mu\right) d\mu(x)\\ \leq & \frac{4C}{\lambda}\int_{[x_k,x_{k+1}]} f(x)v(x)d\mu(x).\end{aligned}$$

Para $p>1$, aplicamos la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}\lambda^p \leq & \frac{4^p}{\mu(x_{k-1},b\}^p}\left(\int_{[x_k,x_{k+1}]} f d\mu\right)^p = \frac{4^p}{\mu(x_{k-1},b\}^p}\left(\int_{[x_k,x_{k+1}]} f v^{\frac{1}{p}} v^{-\frac{1}{p}} d\mu\right)^p\\ \leq & \frac{4^p}{\mu(x_{k-1},b\}^p}\left(\int_{[x_k,x_{k+1}]} f^p v d\mu\right)\left(\int_{[x_k,x_{k+1}]} v^{1-p'} d\mu\right)^{p-1}.\end{aligned}$$

Multiplicando por $\int_{(x_{k-1},x_k]} u d\mu$ y aplicando la condición $A_p^+(\mu)$ obtenemos,

$$\begin{aligned}\int_{(x_{k-1},x_k]} u d\mu \leq & \frac{4^p}{\lambda^p \mu(x_{k-1},b\}^p}\left(\int_{(x_{k-1},x_k]} u d\mu\right)\left(\int_{[x_k,x_{k+1}]} v^{1-p'} d\mu\right)^{p-1}\int_{[x_k,x_{k+1}]} f^p v d\mu\\ \leq & \frac{4^p}{\lambda^p}\frac{1}{\mu(x_{k-1},x_{k+1}]^p}\left(\int_{(x_{k-1},x_k]} u d\mu\right)\left(\int_{[x_k,x_{k+1}]} v^{1-p'} d\mu\right)^{p-1}\int_{[x_k,x_{k+1}]} f^p v d\mu\\ \leq & \frac{4^p C}{\lambda^p}\int_{[x_k,x_{k+1}]} f^p v d\mu.\end{aligned}$$

Luego, para todo $p\geq 1$ hemos probado la desigualdad

$$\int_{(x_{k-1},x_k]} u d\mu \leq \frac{4^p C}{\lambda^p}\int_{[x_k,x_{k+1}]} f^p v d\mu.$$

Sumando en k obtenemos,

$$\begin{aligned}\int_{\bigcup_k (x_{k-1},x_k]} u d\mu = & \sum_k \int_{(x_{k-1},x_k]} u d\mu \leq \sum_k \frac{4^p C}{\lambda^p}\int_{[x_k,x_{k+1}]} f^p v d\mu\\ = & \frac{4^p C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_k \chi_{[x_k,x_{k+1}]}\right) f^p v d\mu\\ \leq & \frac{4^p C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}}\left(2\chi_{\bigcup_k (x_k,x_{k+1}]}\right) f^p v d\mu\\ \leq & \frac{4^p 2C}{\lambda^p}\int_{(a,b\}} f^p v d\mu,\end{aligned}$$

y usando que $(a,b\} = \bigcup_{k\geq 1}(x_{k-1},x_k]$ salvo por un conjunto de μ-medida cero, entonces

$$\int_{(a,b\}} u d\mu \leq \frac{4^p 2C}{\lambda^p} \int_{(a,b\}} f^p v d\mu. \tag{3.20}$$

Puesto que la desigualdad anterior es válida para cada intervalo componente $(a,b\} = (a_n,b_n\}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{E_{\lambda,N}} u d\mu =& \sum_n \int_{(a_n,b_n\}} u d\mu \leq \frac{4^p 2C}{\lambda^p} \sum_n \int_{(a_n,b_n\}} f^p v d\mu \\ =& \frac{4^p 2C}{\lambda^p} \int_{E_{\lambda,N}} f^p v d\mu \leq \frac{4^p 2C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}} f^p v d\mu.\end{aligned}$$

Haciendo tender $N \to -\infty$ se concluye la prueba para $f > 0$.

Sea $f \geq 0$ acotada con soporte compacto, entonces para cada $\varepsilon > 0$ podemos aplicar el caso anterior a $f+\varepsilon$. Sea $N \in \mathbb{Z}$ y consideremos $\{x > N : M_\mu^+(f+\varepsilon)(x) > \lambda\} = \bigcup_n (a_n,b_n\}$, y observemos que como f es acotada con soporte compacto, entonces los intervalos $(a_n,b_n\}$ son acotados. Como $f+\varepsilon > 0$, entonces para cada n tenemos la desigualdad (3.20),

$$\int_{(a_n,b_n\}} u d\mu \leq \frac{4^p 2C}{\lambda^p} \int_{(a_n,b_n\}} (f+\varepsilon)^p v d\mu.$$

Vamos a aplicar el *Teorema de la Convergencia Dominada* a la integral de la derecha, para ello, observemos que para todo $0 < \varepsilon < 1$ se tiene

$$\begin{aligned}(f+\varepsilon)^p \chi_{(a_n,b_n\}} <& (f+1)^p \chi_{(a_n,b_n\}} \leq (2\,\text{máx}\{f,1\})^p\, \chi_{(a_n,b_n\}} \\ =& 2^p\,\text{máx}\{f^p,1\} \chi_{(a_n,b_n\}} \leq 2^p f^p \chi_{(a_n,b_n\}} + 2^p \chi_{(a_n,b_n\}},\end{aligned}$$

y las dos funciones de la derecha son integrables, ya que f^p sigue siendo acotada y de soporte compacto, y la segunda función verifica,

$$\int_{\mathbb{R}} 2^p \chi_{(a_n,b_n\}} v d\mu = 2^p v_\mu(a_n,b_n\} < \infty,$$

ya que v es localmente integrable. Entonces aplicando el *Teorema de la Convergencia Dominada*, obtenemos

$$\int_{(a_n,b_n\}} u d\mu \leq \frac{4^p 2C}{\lambda^p} \int_{(a_n,b_n\}} f^p v d\mu,$$

y sumando en n obtenemos

$$\int_{\{x>N : M_\mu^+(f+\varepsilon)(x)>\lambda\}} u d\mu \leq \frac{4^p 2C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}} f^p v d\mu.$$

Ahora observemos que como $M_\mu^+ f \leq M_\mu^+(f+\varepsilon)$, entonces para cada $\lambda > 0$ tenemos la inclusión

$$\{x > N : M_\mu^+ f(x) > \lambda\} \subset \{x > N : M_\mu^+(f+\varepsilon)(x) > \lambda\},$$

para cada $\varepsilon > 0$. Y por tanto, hemos probado

$$\int_{\{x>N : M_\mu^+ f(x)>\lambda\}} u d\mu \leq \frac{4^p 2C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}} f^p v d\mu,$$

para todo $\lambda > 0$. Haciendo tender $N \to -\infty$ se obtiene la desigualdad de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$.
Por último veamos el recíproco. En la prueba del Teorema 3.14 probamos para $p > 1$ que M_μ^+ es de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$, entonces $(u,v) \in A_p^+(\mu)$. Veamos el caso $p = 1$. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a < b < c$ y $f \geq 0$ tal que $\int_{[b,c)} f d\mu > 0$, entonces si le aplicamos la desigualdad de tipo débil $(1,1)$ a la función $f\chi_{[b,c)}$ tenemos,

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}: M_\mu^+(f\chi_{[b,c)})(x)>\lambda\}} u d\mu \leq \frac{C}{\lambda} \int_{[b,c)} f v d\mu \tag{3.21}$$

para todo $\lambda > 0$. Observemos que si $x \in (a,b]$ entonces se verifica

$$\frac{1}{\mu(a,c)} \int_{[b,c)} f d\mu \leq \frac{1}{\mu[x,c)} \int_{[x,c)} f\chi_{[b,c)} d\mu \leq M_\mu^+(f\chi_{[b,c)})(x).$$

Sea $\lambda_0 = \frac{1}{\mu(a,c)} \int_{[b,c)} f d\mu$. Tomando $0 < \lambda < \lambda_0$ en (3.21) tenemos la inclusión $(a,b] \subset \{x \in \mathbb{R} : M_\mu^+(f\chi_{[b,c)})(x) > \lambda\}$ y, por tanto,

$$u_\mu(a,b] = \int_{(a,b]} u d\mu \leq \int_{\{x\in\mathbb{R}: M_\mu^+(f\chi_{[b,c)})(x)>\lambda\}} u d\mu \leq \frac{C}{\lambda} \int_{[b,c)} f v d\mu.$$

Haciendo tender $\lambda \to \lambda_0$ y reordenando en la expresión anterior llegamos a

$$\frac{1}{\mu(a,c)} \int_{[b,c)} f d\mu \leq \frac{C}{u_\mu(a,b]} \int_{[b,c)} f v d\mu,$$

y esto es (3.5) para $p = 1$, luego $(u,v) \in A_1^+(\mu)$. □

3. Caracterización de los pares de pesos (u,v) para los que M_μ^+ es de tipo fuerte (p,p)

En esta sección vamos a estudiar los pares de pesos (u,v) para los que M_μ^+ es de tipo fuerte (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Seguiremos la prueba de *Andersen* [1].

Teorema 3.18. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados, $1 < p < \infty$ y (u,v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Sea $\sigma = v^{1-p'}$ donde p' es el exponente conjugado de p. Son equivalentes:*

1. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{[a,b)} |M_\mu^+(\sigma\chi_{[a,b)})(x)|^p u(x) d\mu(x) \leq C \int_{[a,b)} \sigma(x) d\mu(x) < \infty \tag{$S_p^+(\mu)$}$$

   para todos los números $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tales que $\int_{(-\infty,a]} u d\mu > 0$.

2. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |M_\mu^+ f(x)|^p u(x) d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x) d\mu(x), \tag{3.22}$$

   para toda $f \in L^p(vd\mu)$.

Definición 3.19. Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$, y $1 < p < \infty$. Diremos que un par de pesos (u, v) verifica la condición $S_p^+(\mu)$, o simplemente, $(u, v) \in S_p^+(\mu)$ si se verifica ($S_p^+(\mu)$).

Demostración: Supongamos que M_μ^+ verifica (3.22). Entonces M_μ^+ cumple la desigualdad de tipo débil (p, p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$, y aplicando el Teorema 3.14 tenemos $(u, v) \in A_p^+(\mu)$. Por tanto tenemos $\int_{[a,b)} \sigma d\mu < \infty$ para todos $a < b$ tal que $\int_{(-\infty,a]} ud\mu > 0$. Ahora basta tomar $f = \sigma\chi_{[a,b)}$ en (3.22) para obtener que $(u, v) \in S_p^+(\mu)$,

$$\begin{aligned}\int_{[a,b)} |M_\mu^+(\sigma\chi_{[a,b)})(x)|^p u(x)d\mu(x) \leq& \int_{\mathbb{R}} |M_\mu^+(\sigma\chi_{[a,b)})(x)|^p u(x)d\mu(x)\\ \leq& C\int_{[a,b)} |\sigma(x)|^p v(x)d\mu(x)\\ =& C\int_{[a,b)} v(x)^{(1-p')p+1} d\mu(x)\\ =& C\int_{[a,b)} v(x)^{1-p'} d\mu(x)\\ =& C\int_{[a,b)} \sigma(x)d\mu(x).\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos $(u, v) \in S_p^+(\mu)$. Sea $\varepsilon > 0$, y definamos el intervalo I_ε de la siguiente manera: si $\int_{(-\infty,x]} ud\mu > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $I_\varepsilon = \mathbb{R}$; sea $x_0 = \sup\{x \in \mathbb{R} : \int_{(-\infty,x]} ud\mu = 0\}$, si $\int_{(-\infty,x_0]} ud\mu = 0$, entonces $I_\varepsilon = [x_0 + \varepsilon, \infty)$ y si $\int_{(-\infty,x_0]} ud\mu > 0$, entonces $I_\varepsilon = [x_0, \infty)$. Observemos que el intervalo I_ε tiene la siguiente propiedad: si $a < b$ con $a \in I_\varepsilon$, entonces la condición $S_p^+(\mu)$ implica

$$\int_{[a,b)} |M_\mu^+(\sigma\chi_{[a,b)})(x)|^p u(x)d\mu(x) \leq C\int_{[a,b)} \sigma(x)d\mu(x) < \infty. \tag{3.23}$$

Sea $f \in L^p(vd\mu)$ una función no negativa, acotada y de soporte compacto. Sea $N \in \mathbb{Z}$, definimos $\Omega_k = \{x > N : M_\mu^+ f(x) > 2^k\}$ para $k \in \mathbb{Z}$. Observemos que $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Como hemos hecho en pruebas anteriores, podemos descomponer $\Omega_k = \bigcup_j I_j^k$ donde los intervalos $I_j^k = (a_j^k, b_j^k\}$ son acotados y satisfacen

$$\int_{[x,b_j^k\}} f d\mu > 2^k \mu[x, b_j^k\} > 0, \tag{3.24}$$

para todo $x \in I_j^k$. Sean $E_k = \Omega_k \setminus \Omega_{k+1}$, $E_j^k = I_j^k \setminus \Omega_{k+1}$ y $F_j^k = E_j^k \cap I_\varepsilon$. Aplicando la desigualdad de Hölder en (3.24) tenemos

$$0 < 2^k \mu[x, b_j^k\} < \int_{[x,b_j^k\}} f v^{\frac{1}{p}} v^{-\frac{1}{p}} d\mu \leq \left(\int_{[x,b_j^k\}} f^p v d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{[x,b_j^k\}} v^{1-p'} d\mu\right)^{\frac{1}{p'}},$$

y esta expresión junto con (3.23) implican

$$0 < \int_{[x,b_j^k\}} \sigma d\mu < \infty,$$

para todo $x \in F_j^k$. Entonces podemos estimar,

$$\begin{aligned}\int_{(N,\infty)\cap I_\varepsilon} |M_\mu^+ f|^p u d\mu =& \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{E_k\cap I_\varepsilon} |M_\mu^+ f|^p u d\mu \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{E_k\cap I_\varepsilon} (2^{k+1})^p u d\mu \\ =& 2^p \sum_{k,j} 2^{kp} \int_{E_j^k\cap I_\varepsilon} u d\mu = 2^p \sum_{k,j} \int_{F_j^k} 2^{kp} u d\mu \\ \leq& 2^p \sum_{k,j} \int_{F_j^k} u(x) \left(\frac{1}{\mu[x, b_j^k\}} \int_{[x,b_j^k\}} f d\mu \right)^p d\mu(x) \\ =& 2^p \sum_{k,j} \int_{F_j^k} u(x) \left(\frac{1}{\sigma_\mu[x, b_j^k\}} \int_{[x,b_j^k\}} f d\mu \right)^p \left(\frac{\sigma_\mu[x, b_j^k\}}{\mu[x, b_j^k\}} \right)^p d\mu(x) \\ =& 2^p \int_X T(f\sigma^{-1})^p d\omega,\end{aligned}$$

donde $X = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$, y la medida ω viene dada por

$$d\omega(j,k,x) = \left(\frac{\sigma_\mu[x, b_j^k\}}{\mu[x, b_j^k\}} \right)^p \chi_{F_j^k}(x) u(x) d\mu(x),$$

y T es el operador definido para cada función g medible y no negativa como sigue

$$Tg(j,k,x) = \frac{1}{\sigma_\mu[x, b_j^k\}} \int_{[x,b_j^k\}} g(y)\sigma(y) d\mu(y).$$

Observemos que el operador T es acotado de $L^\infty(\sigma d\mu)$ en $L^\infty(d\omega)$, ya que si $g \in L^\infty(\sigma d\mu)$, entonces

$$\begin{aligned}|Tg(j,k,x)| =& \left| \frac{1}{\sigma_\mu[x, b_j^k\}} \int_{[x,b_j^k\}} g(y)\sigma(y) d\mu(y) \right| \leq \frac{1}{\sigma_\mu[x, b_j^k\}} \int_{[x,b_j^k\}} |g(y)|\sigma(y) d\mu(y) \\ \leq& \|g\|_{L^\infty(\sigma d\mu)} \frac{1}{\sigma_\mu[x, b_j^k\}} \int_{[x,b_j^k\}} \sigma(y) d\mu(y) = \|g\|_{L^\infty(\sigma d\mu)},\end{aligned}$$

para todo $x \in F_j^k$, luego $\|Tg\|_{L^\infty(d\omega)} \leq \|g\|_{L^\infty(\sigma d\mu)}$. Si probamos que T es acotado de $L^1(\sigma d\mu)$ en $L^{1,\infty}(d\omega)$ habremos terminado, ya que mediante una interpolación obtendremos que T es acotado de $L^p(\sigma d\mu)$ en $L^p(d\omega)$, y entonces

$$\begin{aligned}\int_{(N,\infty)\cap I_\varepsilon} |M_\mu^+ f|^p u d\mu \leq& 2^p \int_X T(f\sigma^{-1})^p d\omega \\ \leq& 2^p C \int_{\mathbb{R}} |f\sigma^{-1}|^p \sigma d\mu = 2^p C \int_{\mathbb{R}} |f|^p v d\mu.\end{aligned}$$

Haciendo tender $\varepsilon \to 0^+$ en primer lugar, y luego $N \to -\infty$ obtenemos (3.22). Por tanto, tenemos que probar que existe $C > 0$ tal que para toda $g \in L^1(\sigma d\mu)$ se tiene

$$\int_{\{(j,k,x)\in X : |Tg(j,k,x)|>\lambda\}} d\omega \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} g\sigma d\mu,$$

para todo $\lambda > 0$.

Sean $A_j^k = F_j^k \cap \{x \in \mathbb{R} : |Tg(j,k,x)| > \lambda\}$ para para cada $j,k \in \mathbb{Z}$. Tenemos entonces la siguiente cadena de inclusiones

$$A_j^k \subset F_j^k \subset E_j^k \subset I_j^k.$$

Para cada k la familia $\{I_j^k\}_j$ es disjunta dos a dos, y como $E_j^k \subset I_j^k$, entonces la familia $\{E_j^k\}_j$ también es disjunta dos a dos. Veamos que la familia $\{E_j^k\}_{j,k}$ es disjunta dos a dos, y por tanto habremos probado que $\{A_j^k\}_{j,k}$ también es disjunta dos a dos. Sea $r \geq 1$ y veamos que E_j^k y $E_{j'}^{k+r}$ son disjuntos. Supongamos que existe $x \in E_j^k \cap E_{j'}^{k+r}$.

- Como $x \in E_j^k$, entonces $x \in I_j^k$ y $x \notin \Omega_{k+1}$.
- Como $x \in E_{j'}^{k+r}$, entonces $x \in I_{j'}^{k+r}$ y $x \notin \Omega_{k+r+1}$.

Esto es incompatible, ya que como $r \geq 1$ entonces

$$x \in I_{j'}^{k+r} \subset \Omega_{k+r} \subset \Omega_{k+1}.$$

Luego esto es una contradicción, y necesariamente tenemos $E_j^k \cap E_{j'}^{k+r} = \emptyset$. Hemos probado que la familia $\{E_j^k\}_{j,k}$ es disjunta dos a dos, y por tanto $\{A_j^k\}_{j,k}$ también es disjunta dos a dos. Para cada $j,k \in \mathbb{Z}$ definimos $d_j^k = \text{ínf } A_j^k$, y denotaremos

$$J_j^k = \begin{cases} [d_j^k, b_j^k\} & \text{si } d_j^k \in A_j^k \\ (d_j^k, b_j^k\} & \text{si } d_j^k \notin A_j^k \end{cases}.$$

Denotemos $\mathcal{L} = \{J_j^k\}_{j,k}$. Veamos que dados dos intervalos de la familia $\mathcal{L}$ o son disjuntos o uno está contenido en el otro. Observemos que $\{J_j^k\}_j$ es disjunta para cada k, ya que $\{I_j^k\}_j$ es una familia disjunta. Sean J_j^k y J_h^l, por el comentario anterior, podemos suponer $k \neq l$. Si $I_j^k \cap I_h^l = \emptyset$, entonces J_j^k y J_h^l también son disjuntos. Supongamos $I_j^k \subset I_h^l$, como $E_j^k \cap E_h^l = \emptyset$, entonces necesariamente $F_j^k \cap F_h^l = \emptyset$. Tenemos entonces dos posibilidades:

- Si existen puntos de A_h^l menores que a_j^k, entonces $d_h^l < a_j^k$ y por tanto $J_j^k \subset J_h^l$.
- Si todos los puntos de A_h^l son mayores que b_j^k, entonces $d_h^l \geq b_j^k$ y por tanto J_j^k y J_h^l son disjuntos.

Esta propiedad nos va a permitir extraer de $\mathcal{L}$ un subrrecubrimiento disjunto. Tomemos $\widetilde{J_1} \in \mathcal{L}$ verificando $|\widetilde{J_1}| > \frac{1}{2}\sup\{|J| : J \in \mathcal{L}\}$. Entonces definimos $J_1 = \bigcup\{J \in \mathcal{L} : \widetilde{J_1} \subseteq J\}$ y $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \setminus J_1$. Supongamos ahora que hemos seleccionado $J_1, ..., J_n$, y definimos $\mathcal{L}_n = \mathcal{L} \setminus (\bigcup_{i=1}^n J_i)$. Entonces seleccionamos, si es posible, $\widetilde{J_{n+1}} \in \mathcal{L}_n$ con $|\widetilde{J_{n+1}}| > \frac{1}{2}\sup\{|J| : J \in \mathcal{L}_n\}$, y definimos $J_{n+1} = \bigcup\{J \in \mathcal{L}_n : \widetilde{J_{n+1}} \subseteq J\}$. Este procedimiento produce una sucesión $\{J_n\}$, que podría ser finita, de intervalos disjuntos dos a dos y tal que $\mathcal{L} = \bigcup_n J_n$. Observemos que cada J_j^k está contenido en un único J_n. Como cada J_n es un intervalo de longitud finita con el extremo izquierdo en I_ε, entonces tenemos

$$\int_{J_n} |M_\mu^+(\sigma\chi_{J_n})|^p u d\mu \leq C \int_{J_n} \sigma d\mu. \tag{3.25}$$

Observemos también que por la definición de los A_j^k, si $x \in A_j^k$ entonces

$$\int_{[x,b_j^k\}} g\sigma d\mu > \lambda\sigma_\mu[x, b_j^k\},$$

y haciendo tender $x \downarrow d_j^k$ obtenemos

$$\int_{J_j^k} g\sigma d\mu \geq \lambda\sigma_\mu(J_j^k).$$

Además, como cada J_n se puede expresar como unión de una sucesión creciente de J_j^k tenemos,

$$\int_{J_n} g\sigma d\mu \geq \lambda\sigma_\mu(J_n). \tag{3.26}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{\{(j,k,x)\in X:|Tg(j,k,x)|>\lambda\}} d\omega &= \sum_{j,k}\int_{A_j^k}\left(\frac{1}{\mu[x,b_j^k\}}\int_{[x,b_j^k\}}\sigma d\mu\right)^p u(x)d\mu(x)\\
&= \sum_n \sum_{\{(j,k):J_j^k\subseteq J_n\}}\int_{A_j^k}\left(\frac{1}{\mu[x,b_j^k\}}\int_{[x,b_j^k\}}\sigma\chi_{J_n}d\mu\right)^p u(x)d\mu(x)\\
&\leq \sum_n \sum_{\{(j,k):J_j^k\subseteq J_n\}}\int_{A_j^k}|M_\mu^+(\sigma\chi_{J_n})(x)|^p u(x)d\mu(x)\\
&= \sum_n \int_{\bigcup_{\{(j,k):J_j^k\subseteq J_n\}}A_j^k}|M_\mu^+(\sigma\chi_{J_n})(x)|^p u(x)d\mu(x)\\
&\leq \sum_n \int_{J_n}|M_\mu^+(\sigma\chi_{J_n})(x)|^p u(x)d\mu(x).
\end{aligned}$$

Usando (3.25) y (3.26), podemos concluir

$$\begin{aligned}
\int_{\{(j,k,x)\in X:|Tg(j,k,x)|>\lambda\}} d\omega &\leq \sum_n \int_{J_n}|M_\mu^+(\sigma\chi_{J_n})(x)|^p u(x)d\mu(x)\\
&\leq C\sum_n\int_{J_n}\sigma(x)d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda}\sum_n\int_{J_n}g(x)\sigma(x)d\mu(x)\\
&= \frac{C}{\lambda}\int_{\bigcup_n J_n} g(x)\sigma(x)d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} g(x)\sigma(x)d\mu(x).
\end{aligned}$$

□

Como consecuencia inmediata del resultado que acabamos de probar obtenemos la siguiente implicación.

Corolario 3.20. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados, y (u,v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Si $(u,v)\in S_p^+(\mu)$, entonces $(u,v)\in A_p^+(\mu)$.*

Demostración: Si $(u,v)\in S_p^+(\mu)$, entonces por el teorema anterior tenemos que M_μ^+ es acotado de $L^p(vd\mu)$ en $L^p(ud\mu)$. Esto implica que M_μ^+ es de tipo débil (p,p) con respecto al par de medidas $(ud\mu, vd\mu)$, y por tanto el Teorema 3.14 nos asegura que $(u,v)\in A_p^+(\mu)$. □

Los resultados son análogos para M_μ^-.

Teorema 3.21. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados, $1<p<\infty$ y (u,v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Sea $\sigma = v^{1-p'}$ donde p' es el exponente conjugado de p. Son equivalentes:*

1. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{(a,b]} |M_\mu^-(\sigma\chi_{(a,b]})(x)|^p u(x)d\mu(x) \leq C \int_{(a,b]} \sigma(x)d\mu(x) < \infty. \qquad (S_p^+(\mu))$$

para todos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tales que $\int_{[b,\infty)} ud\mu > 0$.

2. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |M_\mu^- f(x)|^p u(x)d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x)d\mu(x), \qquad (3.27)$$

para toda $f \in L^p(vd\mu)$.

Definición 3.22. Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$, y $1 < p < \infty$. Diremos que un par de pesos (u, v) verifica la condición $S_p^-(\mu)$, o simplemente, $(u, v) \in S_p^-(\mu)$ si se verifica $(S_p^+(\mu))$.

Corolario 3.23. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados, y (u, v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Si $(u, v) \in S_p^-(\mu)$, entonces $(u, v) \in A_p^-(\mu)$.*

4. Acotación de M_μ^+ con pesos iguales

En esta sección vamos a desarrollar la teoría de pesos $A_p^+(\mu)$ para pesos iguales, es decir, para $(w, w) \in A_p^+(\mu)$. Al igual que en el capítulo anterior, escribiremos $w \in A_p^+(\mu)$ para referirnos a $(w, w) \in A_p^+(\mu)$. En primer lugar probemos algunas propiedades de las clases $A_p^+(\mu)$ para pesos iguales.

Proposición 3.24. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Si w es un peso creciente, entonces $w \in A_p^+(\mu)$ para todo $1 \leq p < \infty$.*

Demostración: Supongamos en primer lugar $p = 1$. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a < b < c$, entonces

$$\frac{1}{\mu(a,c)} \int_{(a,b]} w(y)d\mu(y) \leq \frac{1}{\mu(a,c)} \int_{(a,b]} w(b)d\mu(y) = w(b)\frac{\mu(a,b]}{\mu(a,c)} \leq w(b) \leq w(x),$$

para todo $x \in [b, c)$, ya que w es creciente. Hemos probado entonces $w \in A_1^+(\mu)$. En vista de la Proposición 3.6 tenemos que $w \in A_1^+(\mu) \subset A_p^+(\mu)$ para todo $p > 1$. □

Análogamente se probaría el siguiente resultado.

Proposición 3.25. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Si w es un peso decreciente, entonces $w \in A_p^-(\mu)$ para todo $1 \leq p < \infty$.*

Observación 3.26. Las proposiciones anteriores nos permiten observar que las clases $A_p^+(\mu)$ y $A_p^-(\mu)$ son, en general, más grandes que $A_p(\mu)$, ya que por ejemplo, cualquier peso creciente pertenece a $A_1^+(\mu)$, pero esto no es cierto con $A_1(\mu)$. De hecho, existen pesos crecientes que no están en ninguna clase $A_p(\mu)$, es decir, no están en $A_\infty(\mu)$. Si tomamos $w(x) = e^x$ y μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, entonces w es creciente y la medida $w(x)dx$ no es doblante, luego $w \notin A_\infty$.

Ahora vamos a dar un resultado análogo al Teorema 2.16.

Proposición 3.27. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Sea $1 < p < \infty$, w un peso en $\mathbb{R}$ y denotemos $\sigma = w^{1-p'}$. Se tiene que $w \in A_p^+(\mu)$ si y solo si $\sigma \in A_{p'}^-(\mu)$.*

Demostración: Supongamos que $w \in A_p^+(\mu)$. Sean $a < b < c$, entonces tenemos

$$\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)}\sigma d\mu\right)\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]}\sigma^{1-p'}d\mu\right)^{p-1}$$
$$=\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)}w^{1-p'}d\mu\right)\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]}wd\mu\right)^{p-1}\leq C,$$

ya que $w \in A_p^+(\mu)$. Luego $\sigma \in A_{p',d}^-(\mu)$. La otra implicación se prueba de forma análoga. □

De forma similar se obtiene el resultado dual.

Proposición 3.28. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Sea $1 < p < \infty$, w un peso en $\mathbb{R}$ y denotemos $\sigma = w^{1-p'}$. Se tiene que $w \in A_p^-(\mu)$ si y solo si $\sigma \in A_{p'}^+(\mu)$.*

Ahora vamos a estudiar en qué clase está el peso $\widetilde{w}(x) = w(-x)$ para un peso $w \in A_p^+(\mu)$.

Proposición 3.29. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Si definimos $\widetilde{\mu}$ como $\widetilde{\mu}(E) = \mu(-E)$ y $\widetilde{w}(x) = w(-x)$. Entonces $w \in A_p^+(\mu)$ si y solo si $\widetilde{w} \in A_p^-(\widetilde{\mu})$.*

Demostración: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a < b < c$. La equivalencia es consecuencia de la siguiente igualdad:

$$\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]}w(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)}w(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1}$$
$$=\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[-b,-a)}\widetilde{w}(x)d\widetilde{\mu}(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(-c,-b]}\widetilde{w}(x)^{1-p'}d\widetilde{\mu}(x)\right)^{p-1}$$
$$=\left(\frac{1}{\widetilde{\mu}(-c,-a)}\int_{[-b,-a)}\widetilde{w}(x)d\widetilde{\mu}(x)\right)\left(\frac{1}{\widetilde{\mu}(-c,-a)}\int_{(-c,-b]}\widetilde{w}(x)^{1-p'}d\widetilde{\mu}(x)\right)^{p-1}.$$

□

En el siguiente resultado vamos a ver que para pesos iguales, la acotación de M_μ^+ en $L^p(wd\mu)$ es equivalente a $w \in A_p^+(\mu)$.

Teorema 3.30 ([24])**.** *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Sean $1 < p < \infty$ y w un peso en $\mathbb{R}$. Denotemos $\sigma = w^{1-p'}$, donde p' es el exponente conjugado de p. Son equivalentes:*

1. *$w \in A_p^+(\mu)$.*
2. *Existe una constante C tal que para toda función medible f se tiene*

$$M_\mu^+ f(x) \leq C\left[M_{wd\mu}^+\left(\left(M_{\sigma d\mu}(f\sigma^{-1})\right)^{p-1}w^{-1}\right)(x)\right]^{p'-1}, \tag{3.28}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{(-\infty,x]} wd\mu > 0$.

3. *M_μ^+ es acotado en $L^p(wd\mu)$, es decir, existe una constante $C>0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |M_\mu^+ f(x)|^p w(x) d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x) d\mu(x),$$

para toda $f \in L^p(wd\mu)$.

Demostración:

1. Supongamos $w \in A_p^+(\mu)$ y sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{(-\infty,x]} w d\mu > 0$. Sea $[x,a)$ un intervalo tal que $\mu[x,a) > 0$. Veamos que $0 < \sigma_\mu[x,a) < \infty$. Supongamos $\sigma_\mu[x,a) = 0$, entonces $w = \infty$ en casi todo punto de $[x,a)$. Esto no es posible, ya que como $\mu[x,a) > 0$, entonces se tendría $w = 0$ en un conjunto de medida positiva, lo que contradice que w sea un peso. Supongamos $\sigma_\mu[x,a) = \infty$, entonces aplicando la condición $A_p^+(\mu)$ obtenemos que $w = 0$ en casi todo punto de $(-\infty, x]$, lo cual es imposible por hipótesis. Entonces usando la caracterización (3.9) de la condición $A_p^+(\mu)$ tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu[x,a)} \int_{[x,a)} |f| d\mu \leq & \left(\frac{C}{\sigma_\mu[x,a)} \int_{[x,a)} |f| d\mu \right) \left(M^+_{wd\mu} \left(w^{-1} \chi_{[x,a)} \right)(x) \right)^{p'-1} \\ \leq & C \left(M^+_{wd\mu} \left(\left(M_{\sigma d\mu}(f\sigma^{-1}) \right)^{p-1} w^{-1} \chi_{[x,a)} \right)(x) \right)^{p'-1}.\end{aligned}$$

Por tanto obtenemos,

$$M_\mu^+ f(x) \leq C \left(M^+_{wd\mu} \left(\left(M_{\sigma d\mu}(f\sigma^{-1}) \right)^{p-1} w^{-1} \right)(x) \right)^{p'-1}.$$

2. Supongamos que se verifica (3.28) y veamos que M_μ^+ es acotado en $L^p(wd\mu)$. Para cada $\varepsilon > 0$, sea I_ε el intervalo definido al comienzo de la prueba del Teorema 3.22. Entonces para cada $x \in I_\varepsilon$ se verifica $\int_{(-\infty,x]} w d\mu > 0$, y por tanto podemos aplicar la desigualdad (3.28). Sea $f \in L^p(wd\mu)$. Ahora apliquemos que $M^+_{wd\mu}$ es acotado en $L^{p'}(wd\mu)$ y $M_{\sigma d\mu}$ es acotado en $L^p(\sigma d\mu)$,

$$\begin{aligned}\int_{I_\varepsilon} |M_\mu^+ f(x)|^p w(x) d\mu(x) \leq & C^p \int_{I_\varepsilon} \left| M^+_{wd\mu} \left(\left(M_{\sigma d\mu}(f\sigma^{-1}) \right)^{p-1} w^{-1} \right)(x) \right|^{p'} w(x) d\mu(x) \\ \leq & C^p \int_{\mathbb{R}} \left| M^+_{wd\mu} \left(\left(M_{\sigma d\mu}(f\sigma^{-1}) \right)^{p-1} w^{-1} \right)(x) \right|^{p'} w(x) d\mu(x) \\ \leq & C^p C_1 \int_{\mathbb{R}} \left| M_{\sigma d\mu}(f\sigma^{-1})(x)^{p-1} w(x)^{-1} \right|^{p'} w(x) d\mu(x) \\ = & C^p C_1 \int_{\mathbb{R}} \left| M_{\sigma d\mu}(f\sigma^{-1})(x) \right|^p \sigma(x) d\mu(x) \\ \leq & C^p C_1 C_2 \int_{\mathbb{R}} \left| f(x)\sigma(x)^{-1} \right|^p \sigma(x) d\mu(x) \\ = & C^p C_1 C_2 \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x) d\mu(x),\end{aligned}$$

Haciendo tender $\varepsilon \to 0^+$ obtenemos la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}} |M_\mu^+ f(x)|^p w(x) d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x) d\mu(x).$$

Luego M_μ^+ es acotado en $L^p(wd\mu)$.

3. Supongamos que M_μ^+ es acotado en $L^p(wd\mu)$, entonces es de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(wd\mu, wd\mu)$, y el Teorema 3.14 nos asegura que esto implica $w \in A_p^+(\mu)$. □

La prueba anterior de que $w \in A_p^+(\mu)$ implica que M_μ^+ es acotado en $L^p(wd\mu)$, es una demostración que evita el uso de $A_p^+(\mu) \Rightarrow A_{p-\varepsilon}^+(\mu)$. Esto es necesario, ya que aunque para la medida de Lebesgue esto es cierto [32], en [12] se prueba que existen medidas μ para las que no se da $A_p^+(\mu) \Rightarrow A_{p-\varepsilon}^+(\mu)$. En la siguiente sección probaremos este hecho como consecuencia de la relación de las clases $A_p^+(\mu)$ y $A_p^-(\mu)$ con la clase $A_p(\mu)$, y de la falsedad de esta propiedad para las clases $A_p(\mu)$.

Podemos agrupar el resultado anterior con el Teorema 3.14 y obtenemos que, si $1 < p < \infty$ el tipo débil (p,p) de M_μ^+ con respecto a las medidas $(wd\mu, wd\mu)$ es equivalente a la acotación de M_μ^+ en $L^p(wd\mu)$.

Teorema 3.31. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Sean $1 < p < \infty$ y w un peso en $\mathbb{R}$. Son equivalentes:*

1. $w \in A_p^+(\mu)$.
2. *M_μ^+ es de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(wd\mu, wd\mu)$, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que para cada $f \in L^p(wd\mu)$ se verifica,*

$$\int_{\{y\in\mathbb{R}: M_\mu^+ f(y) > \lambda\}} w(x)d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x)d\mu(x), \tag{3.29}$$

   para todo $\lambda > 0$.
3. *M_μ^+ es acotado en $L^p(wd\mu)$, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |M_\mu^+ f(x)|^p w(x)d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x)d\mu(x),$$

   para toda $f \in L^p(wd\mu)$.

Como corolario inmediato obtenemos que para pesos iguales las condiciones $A_p^+(\mu)$ y $S_p^+(\mu)$ son equivalentes, es decir, el recíproco del Corolario 3.20 es cierto.

Proposición 3.32. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados y $1 < p < \infty$. Se tiene que $w \in A_p^+(\mu)$ si y solo si $(w,w) \in S_p^+(\mu)$.*

Análogamente se probarían los resultados para M_μ^-.

Teorema 3.33. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Sean $1 < p < \infty$ y w un peso en $\mathbb{R}$. Denotemos $\sigma = w^{1-p'}$, donde p' es el exponente conjugado de p. Son equivalentes:*

1. $(w,w) \in S_p^-(\mu)$.
2. $w \in A_p^-(\mu)$.

3. M_μ^- *es de tipo débil* (p,p) *con respecto a las medidas* $(wd\mu, wd\mu)$*, es decir, existe una constante* $C>0$ *tal que para cada* $f \in L^p(wd\mu)$ *se verifica,*

$$\int_{\{y\in\mathbb{R}:M_\mu^- f(y)>\lambda\}} w(x)d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x)d\mu(x), \tag{3.30}$$

para todo $\lambda > 0$*.*

4. *Existe una constante* C *tal que para toda función medible* f *y todo* $x \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$M_\mu^- f(x) \leq C\left[M_{wd\mu}^-\left(\left(M_{\sigma d\mu}(f\sigma^{-1})\right)^{p-1} w^{-1}\right)(x)\right]^{p'-1}. \tag{3.31}$$

5. M_μ^- *es acotado en* $L^p(wd\mu)$*, es decir, existe una constante* $C>0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |M_\mu^- f(x)|^p w(x)d\mu(x) \leq C\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x)d\mu(x),$$

para toda $f \in L^p(wd\mu)$*.*

5. Desigualdades con pesos para M_μ para medidas no doblantes en $\mathbb{R}$

En esta sección vamos a usar las caracterizaciones anteriores, para probar las correspondientes desigualdades con pesos para M_μ, sin suponer sobre μ la propiedad de duplicación. Para ello vamos a usar la siguiente desigualdad:

$$M_\mu f \leq M_\mu^+ f + M_\mu^- f. \tag{3.32}$$

En primer lugar estudiemos la relación de las clases $A_p^+(\mu)$ y $A_p^-(\mu)$ con $A_p(\mu)$.

Teorema 3.34. *Sea* μ *una medida de Borel en* $\mathbb{R}$ *finita sobre conjuntos acotados. Entonces* $A_p(\mu) = A_p^+(\mu) \cap A_p^-(\mu)$ *para todo* $1 \leq p < \infty$*.*

Demostración: Supongamos que $(u,v) \in A_p(\mu)$. Si $p>1$, entonces para cada $a<b<c$ tenemos,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} u(x)d\mu(x)\right)&\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1}\\ &\leq \left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,c)} u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,c)} v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1}\\ &\leq C,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} u(x)d\mu(x)\right)&\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1}\\ &\leq \left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,c)} u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,c)} v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1}\\ &\leq C.\end{aligned}$$

Luego, $(u,v) \in A_p^+(\mu) \cap A_p^-(\mu)$. Si $p=1$, entonces para cada $a<b<c$ tenemos,

$$\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} u(x)d\mu(x) \leq \frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,c)} u(x)d\mu(x) \leq Cv(x)$$

en casi todo $x \in (a,c)$, luego $(u,v) \in A_1^+(\mu) \cap A_1^-(\mu)$. Recíprocamente, supongamos $(u,v) \in A_p^+(\mu) \cap A_p^-(\mu)$. Entonces aplicando el Teorema 3.17 tenemos que M_μ^+ y M_μ^- son de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Entonces usando la desigualdad (3.32) tenemos,

$$\{x \in \mathbb{R} : M_\mu f(x) > \lambda\} \subset \left\{x \in \mathbb{R} : M_\mu^+ f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : M_\mu^- f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_{\{x\in\mathbb{R}:M_\mu f(x)>\lambda\}} ud\mu \leq & \int_{\left\{x\in\mathbb{R}:M_\mu^+ f(x)>\frac{\lambda}{2}\right\}} ud\mu + \int_{\left\{x\in\mathbb{R}:M_\mu^- f(x)>\frac{\lambda}{2}\right\}} ud\mu \\ \leq & C_1\int_{\mathbb{R}} |f|^p v d\mu + C_2\int_{\mathbb{R}} |f|^p v d\mu = (C_1+C_2)\int_{\mathbb{R}} |f|^p v d\mu,\end{aligned}$$

para todo $\lambda > 0$. Luego M_μ es de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$, y por tanto en el Teorema 2.9 probamos, sin usar la propiedad de duplicación de μ, que $(u,v) \in A_p(\mu)$. □

De hecho, en la prueba anterior hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 3.35. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Sean $1 \leq p < \infty$, y (u,v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Son equivalentes:*

1. $(u,v) \in A_p(\mu)$.
2. *M_μ es de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$, es decir, existe una constante $C>0$,*

$$\int_{\{y\in\mathbb{R}:M_\mu f(y)>\lambda\}} u(x)d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x)d\mu(x), \tag{3.33}$$

para toda $f \in L^p(vd\mu)$, y todo $\lambda > 0$.

Ahora vamos a probar la caracterización de la desigualdad de tipo fuerte (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$ para el operador M_μ.

Teorema 3.36. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados, $1 < p < \infty$ y (u,v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Sea $\sigma = v^{1-p'}$ donde p' es el exponente conjugado de p. Son equivalentes:*

1. *Existe $C>0$ tal que*

$$\int_{(a,b)} |M_\mu(\sigma\chi_{(a,b)})(x)|^p u(x)d\mu(x) \leq C\int_{(a,b)} \sigma(x)d\mu(x) < \infty. \tag{$S_p(\mu)$}$$

para todos $a,b \in \mathbb{R}$ con $a<c$ tales que $\int_{(a,b)} ud\mu > 0$.

2. *Existe* $C > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |M_\mu f(x)|^p u(x) d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x) d\mu(x), \tag{3.34}$$

para toda $f \in L^p(v d\mu)$.

Demostración: Supongamos $(u, v) \in S_p(\mu)$, entonces usando el *Teorema de la Convergencia Dominada* podemos conseguir

$$\int_J |M_\mu(\sigma \chi_J)(x)|^p u(x) d\mu(x) \leq C \int_J \sigma(x) d\mu(x) < \infty, \tag{3.35}$$

donde J es un intervalo de longitud finita de la forma $(a, b]$ o $[a, b)$. Luego, $(u, v) \in S_p^+(\mu) \cap S_p^-(\mu)$, y usando los Teorema 3.22 y 3.27 tenemos,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}} |M_\mu f|^p u d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |M_\mu^+ f + M_\mu^- f|^p u d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |M_\mu^+ f|^p u d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}} |M_\mu^- f|^p u d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p v d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + C_2 \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p v d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (C_1 + C_2) \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p v d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que M_μ es de tipo fuerte (p, p) con respecto a las medidas $(u d\mu, v d\mu)$. Por tanto, M_μ es de tipo débil (p, p) con respecto a las medidas $(u d\mu, v d\mu)$, y aplicando el teorema anterior tenemos $(u, v) \in A_p(\mu)$. Sean $a < b$ tales que $\int_{(a,b)} u d\mu > 0$, entonces por la condición $A_p(\mu)$ tenemos que $\int_{(a,b)} \sigma d\mu < \infty$. Por último, basta tomar $f = \sigma \chi_{(a,b)}$ en (3.34). □

Para pesos iguales tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.37. *Sea* μ *una medida de Borel en* $\mathbb{R}$ *finita sobre conjuntos acotados. Sean* $1 < p < \infty$ *y* w *un peso en* $\mathbb{R}$. *Son equivalentes:*

1. $w \in A_p(\mu)$.

2. M_μ *es de tipo débil* (p, p) *con respecto a las medidas* $(w d\mu, w d\mu)$, *es decir, existe una constante* $C > 0$,

$$\int_{\{y \in \mathbb{R} : M_\mu f(y) > \lambda\}} w(x) d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x) d\mu(x),$$

para toda $f \in L^p(w d\mu)$, *y todo* $\lambda > 0$.

3. M_μ *es acotado en* $L^p(w d\mu)$, *es decir, existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |M_\mu f(x)|^p w(x) d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x) d\mu(x),$$

para toda $f \in L^p(w d\mu)$.

Demostración: Observemos que 1 y 2 son equivalentes por el Teorema 3.35. Si $w \in A_p(\mu) = A_p^+(\mu) \cap A_p^-(\mu)$, entonces tenemos que M_μ^+ y M_μ^- son acotados en $L^p(wd\mu)$. Usando $M_\mu \leq M_\mu^+ + M_\mu^-$ se prueba que M_μ es acotado en $L^p(wd\mu)$. Por último basta observar que 3 implica 2 y por tanto $w \in A_p(\mu)$. □

Como consecuencia del resultado anterior tenemos la siguiente implicación.

Corolario 3.38. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Sean $1 < p < \infty$ y w un peso en $\mathbb{R}$. Entonces, $w \in A_p(\mu)$ si y solo si $(w, w) \in S_p(\mu)$.*

Por último vamos a ver que, para medidas generales, la propiedad $A_p^+(\mu) \Rightarrow A_{p-\varepsilon}^+(\mu)$ no es cierta.

Teorema 3.39. *Existen $1 < p < \infty$, una medida μ y un peso $w \in A_p^+(\mu)$ tal que $w \notin A_{p-\varepsilon}^+(\mu)$ para todo $\varepsilon > 0$.*

Demostración: Supongamos por reducción al absurdo que, para toda medida de Borel en $\mathbb{R}$ se verifican las dos siguientes propiedades:

1. $A_p^+(\mu) \Rightarrow A_{p-\varepsilon}^+(\mu)$,
2. $A_p^-(\mu) \Rightarrow A_{p-\varepsilon}^-(\mu)$.

Sean p y μ los dados por el Teorema 2.41 y $w \in A_p(\mu)$ tal que $w \notin A_{p-\varepsilon}(\mu)$ para todo $\varepsilon > 0$. Observemos que $A_p(\mu) = A_p^+(\mu) \cap A_p^-(\mu)$, y por tanto $w \in A_p^+(\mu) \cap A_p^-(\mu)$. Como $w \in A_p^+(\mu)$, entonces la propiedad 1 nos asegura que existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $w \in A_{p-\varepsilon_1}^+(\mu)$. Como $w \in A_p^-(\mu)$, entonces la propiedad 2 nos asegura que existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $w \in A_{p-\varepsilon_2}^-(\mu)$. Sea $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, entonces los Teoremas 3.6 y 3.7 nos aseguran que $w \in A_{p-\varepsilon}^+(\mu) \cap A_{p-\varepsilon}^-(\mu)$. Por tanto $w \in A_{p-\varepsilon}(\mu)$, lo cual es una contradicción. Luego, al menos una de las propiedades 1 y 2 es falsa. Si la propiedad 1 no es cierta, entonces hemos terminado la prueba. Supongamos que la propiedad 2 es falsa y veamos que entonces 1 tampoco es cierta. Es decir, supongamos que existe un peso $w \in A_p^-(\mu)$ tal que $w \notin A_{p-\varepsilon}^-(\mu)$ para todo $\varepsilon > 0$. Consideremos $\widetilde{\mu}(E) = \mu(-E)$ y $\widetilde{w}(x) = w(-x)$. Entonces por la Proposición 3.29 tenemos $\widetilde{w} \in A_p^+(\widetilde{\mu})$. Si la propiedad 1 fuera cierta entonces existiría $\varepsilon > 0$ tal que $\widetilde{w} \in A_{p-\varepsilon}^+(\widetilde{\mu})$, y de nuevo por la Proposición 3.29 tendríamos $w \in A_{p-\varepsilon}^-(\mu)$, lo cual es una contradicción con la elección de w. □

El argumento anterior prueba también el siguiente resultado.

Teorema 3.40. *Existen $1 < p < \infty$, una medida μ y un peso $w \in A_p^-(\mu)$ tal que $w \notin A_{p-\varepsilon}^-(\mu)$ para todo $\varepsilon > 0$.*

6. Factorización de pesos $A_p^+(\mu)$

En esta sección vamos a probar un teorema de factorización de pesos $A_p^+(\mu)$ similar al Teorema 2.37.

Teorema 3.41. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados y $1 \leq p < \infty$. Entonces $w \in A_p^+(\mu)$ si, y solo si, existen $u \in A_1^+(\mu)$ y $v \in A_1^-(\mu)$ tales que $w = uv^{1-p}$.*

Demostración: Sean $u \in A_1^+(\mu)$ y $v \in A_1^-(\mu)$, y veamos que $w = uv^{1-p} \in A_p^+(\mu)$. Sean $a < b < c$ números reales. Como $u \in A_1^+(\mu)$ tenemos,

$$u(x)^{-1} \leq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[b,c)} u(x)^{-1} = \left(\operatorname*{ess\,ínf}_{x\in[b,c)} u(x)\right)^{-1} \leq C_1 \left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} u d\mu\right)^{-1},$$

en casi todo punto $x \in [b,c)$, y elevando a $p' - 1 > 0$ obtenemos,

$$u(x)^{1-p'} \leq C_1^{p'-1} \left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{(a,b]} u d\mu\right)^{1-p'} \tag{3.36}$$

en casi todo punto $x \in [b,c)$. Como $v \in A_1^-(\mu)$ tenemos,

$$v(x)^{-1} \leq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in(a,b]} v(x)^{-1} = \left(\operatorname*{ess\,ínf}_{x\in(a,b]} v(x)\right)^{-1} \leq C_2 \left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} v d\mu\right)^{-1},$$

y elevando a $p - 1 > 0$ obtenemos,

$$v(x)^{1-p} \leq C_2^{p-1} \left(\frac{1}{\mu(a,c)}\int_{[b,c)} v d\mu\right)^{1-p} \tag{3.37}$$

en casi todo punto $x \in (a,b]$. Entonces, usando estas estimaciones tenemos,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu(a,c)^p}\left(\int_{(a,b]} uv^{1-p}d\mu\right)\left(\int_{[b,c)} (uv^{1-p})^{1-p'}d\mu\right)^{p-1}\\
&\quad= \frac{1}{\mu(a,c)^p}\left(\int_{(a,b]} uv^{1-p}d\mu\right)\left(\int_{[b,c)} u^{1-p'}v d\mu\right)^{p-1}\\
&\quad\leq \frac{1}{\mu(a,c)^p}\left(\int_{(a,b]} uC_2^{p-1}\left(\frac{v_\mu[b,c)}{\mu(a,c)}\right)^{1-p} d\mu\right)\left(\int_{[b,c)} C_1^{p'-1}\left(\frac{u_\mu(a,b]}{\mu(a,c)}\right)^{1-p'} v d\mu\right)^{p-1}\\
&\quad= \frac{C_1C_2^{p-1}}{\mu(a,c)^p}\left(\frac{v_\mu[b,c)}{\mu(a,c)}\right)^{1-p} u_\mu(a,b]\left(\frac{u_\mu(a,b]}{\mu(a,c)}\right)^{(1-p')(p-1)} v_\mu[b,c)^{p-1}\\
&\quad= \frac{C_1C_2^{p-1}}{\mu(a,c)^p}\frac{v_\mu[b,c)^{1-p}v_\mu[b,c)^{p-1}}{\mu(a,c)^{1-p}}\frac{u_\mu(a,b]u_\mu(a,b]^{-1}}{\mu(a,c)^{-1}}\\
&\quad= \frac{C_1C_2^{p-1}}{\mu(a,c)^p}\frac{v_\mu[b,c)^0}{\mu(a,c)^{-p}}u_\mu(a,b]^0 = C_1C_2^{p-1} < \infty.
\end{aligned}$$

Luego, $w = uv^{1-p} \in A_p^+(\mu)$.

Recíprocamente, supongamos que $w \in A_p^+(\mu)$ con $1 < p < \infty$ (si $p = 1$ no hay nada que probar). Sea $\sigma = w^{\frac{-1}{p-1}}$, por la Proposición 3.27 tenemos que $\sigma \in A_{p'}^-(\mu)$. Por tanto, el Teorema 3.30 nos dice que M_μ^+ es acotado en $L^p(wd\mu)$, y el Teorema 3.33 nos asegura que M_μ^- es acotado en $L^{p'}(\sigma d\mu)$.
Consideremos el operador R definido para cada función medible f de la siguiente forma

$Rf = \left| w^{\frac{1}{p}} M_\mu^+(|f|^{p'} w^{-\frac{1}{p}}) \right|^{\frac{1}{p'}}$. Veamos que R es acotado en $L^{pp'}(\mu)$, sea $f \in L^{pp'}(\mu)$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |Rf(x)|^{pp'} d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left| w(x)^{\frac{1}{p}} M_\mu^+(|f|^{p'} w^{-\frac{1}{p}})(x) \right|^p d\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| M_\mu^+(|f|^{p'} w^{-\frac{1}{p}})(x) \right|^p w(x) d\mu(x) \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} \left| |f(x)|^{p'} w(x)^{-\frac{1}{p}} \right|^p w(x) d\mu(x) \\
&= C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{pp'} \, d\mu(x).
\end{aligned}$$

Observemos que R es un operador sublineal. Trivialmente se verifica $R(\lambda f) = |\lambda| Rf$ para $\lambda \in \mathbb{R}$. El operador R es subaditivo, de hecho, vamos a probar que es numerablemente subaditivo. Sean $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones, $x \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > x$. Entonces aplicando la desigualdad integral de Minkowski tenemos,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\mu[x,a)} \int_{[x,a)} \left| \sum_{n=1}^\infty f_n \right|^{p'} w^{-\frac{1}{p}} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} &\leq \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{\mu[x,a)} \int_{[x,a)} |f_n|^{p'} w^{-\frac{1}{p}} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \sum_{n=1}^\infty M_\mu^+(|f_n|^{p'} w^{-\frac{1}{p}})(x)^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

Tomando supremo sobre todo $a > x$ obtenemos,

$$\left(M_\mu^+ \left(\left| \sum_{n=1}^\infty f_n \right|^{p'} w^{-\frac{1}{p}} \right)(x) \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \sum_{n=1}^\infty M_\mu^+ \left(|f_n|^{p'} w^{-\frac{1}{p}} \right)(x)^{\frac{1}{p'}},$$

y por tanto $R\left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty R(f_n)$. Luego R es sublineal y numerablemente subaditivo.

Si definimos el operador R^* como $R^* f = \left| \sigma^{\frac{1}{p'}} M_\mu^-(|f|^p \sigma^{-\frac{1}{p'}}) \right|^{\frac{1}{p}}$, entonces análogamente se prueba que R^* es sublineal, infinitamente subaditivo, y acotado en $L^{pp'}(\mu)$. Como consecuencia de la desigualdad triangular de Minkowski en $L^{pp'}(\mu)$ obtenemos que $R + R^* : L^{pp'}(\mu) \longrightarrow L^{pp'}(\mu)$ es acotado. Sean K la norma del operador $R + R^*$, y $h \in L^{pp'}(\mu)$. Definamos formalmente

$$H = \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{(2K)^i} (R + R^*)^i(h),$$

donde $(R + R^*)^0(h) = h$ y $(R + R^*)^{i+1}(h) = (R + R^*)\left[(R + R^*)^i(h)\right]$. Observemos que $H \in L^{pp'}(\mu)$, ya que

$$\|H\|_{pp'} \leq \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{(2K)^i} \left\|(R + R^*)^i(h)\right\|_{pp'} \leq \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{(2K)^i} K^i \|h\|_{pp'} = \|h\|_{pp'} \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{2^i} = 2 \|h\|_{pp'},$$

y por tanto la definición de H tiene sentido en casi todo punto. Como consecuencia de la definición de H se tiene que $H \geq 0$ y $H \geq |h|$ en casi todo punto. Además, de la

sublinealidad para sumas infinitas de $R + R^*$ se deduce

$$\begin{aligned}(R+R^*)(H) =&(R+R^*)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2K)^i}(R+R^*)^i(h)\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2K)^i}(R+R^*)^{i+1}(h)\\ =&2K\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2K)^{i+1}}(R+R^*)^{i+1}(h) \leq 2KH,\end{aligned}$$

en casi todo punto. Luego tenemos $R(H) \leq 2KH$ y $R^*(H) \leq 2KH$ en casi todo punto. De la definición de R y de la primera de las desigualdades anteriores se deduce $M_\mu^+(H^{p'}w^{-\frac{1}{p}}) \leq 2^{p'}K^{p'}(H^{p'}w^{-\frac{1}{p}})$ en casi todo punto. Y, análogamente con la otra desigualdad obtenemos $M_\mu^-(H^p\sigma^{-\frac{1}{p'}}) \leq 2^pK^p(H^p\sigma^{-\frac{1}{p'}})$. Si denotamos $u = H^p\sigma^{-\frac{1}{p'}}$ y $v = H^{p'}w^{-\frac{1}{p}}$, entonces las desigualdades anteriores y los Teoremas 3.12 y 3.13 nos dicen que $u \in A_1^+(\mu)$ y $v \in A_1^-(\mu)$. Y además tenemos la descomposición deseada,

$$\begin{aligned}uv^{1-p} =&H^p\sigma^{-\frac{1}{p'}}\left(H^{p'}w^{-\frac{1}{p}}\right)^{1-p} = H^pw^{\frac{-1}{p-1}\frac{1}{p'}}H^{p'-pp'}w^{1-\frac{1}{p}}\\ =&H^pw^{\frac{1}{p}}H^{-p}w^{1-\frac{1}{p}} = H^{p-p}w^{\frac{1}{p}}w^{1-\frac{1}{p}} = w.\end{aligned}$$

□

Análogamente se obtiene el correspondiente teorema de factorización de pesos A_p^-.

Teorema 3.42. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados y $1 \leq p < \infty$. Entonces $w \in A_p^-(\mu)$ si, y solo si, existen $u \in A_1^-(\mu)$ y $v \in A_1^+(\mu)$ tales que $w = uv^{1-p}$.*

Capítulo 4

Desigualdades con pesos para el operador maximal diádico lateral

Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. En este capítulo vamos a introducir los siguientes operadores maximales diádicos laterales,

$$M^+_{\mu,d}f(x) = \sup_{I\in\mathcal{D}}\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^+}|f|d\mu\right)\chi_{I^-}(x),$$

y

$$M^-_{\mu,d}f(x) = \sup_{I\in\mathcal{D}}\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^-}|f|d\mu\right)\chi_{I^+}(x)$$

para cada $f \in L^1_{loc}(\mu)$, donde consideramos los cocientes como 0 si el denominador es 0. En primer lugar trabajaremos con el operador maximal diádico $M_{\mu,d}$, definido para cada $f \in L^1_{loc}(\mu)$ como

$$M_{\mu,d}f(x) = \sup_{I\in\mathcal{D}}\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_{I}|f|d\mu\right)\chi_{I}(x).$$

Probaremos que $M_{\mu,d}$ es de tipo débil $(1,1)$ y de tipo fuerte (p,p) para todo $p>1$. Es fácil comprobar que se verifica la relación $M^+_{\mu,d}f(x), M^-_{\mu,d}f(x) \le M_{\mu,d}f(x) \le M^+_{\mu,d}f(x) + M^-_{\mu,d}f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Como consecuencia obtendremos que $M^+_{\mu,d}$ y $M^-_{\mu,d}$ son de tipo débil $(1,1)$, y de tipo fuerte (p,p) para todo $p>1$. El capítulo está dedicado a estudiar desigualdades con pesos para estos operadores, es decir, vamos a estudiar las clases de pesos buenos para estos operadores.

Esta teoría de pesos fue desarrollada para la medida de Lebesgue por *M. Lorente* y *F. J. Martín-Reyes* [21] en 2014. Vamos a extender los resultados de [21] a medidas de Borel en $\mathbb{R}$ finitas sobre conjuntos acotados.

Al igual que en los capítulos anteriores, estudiaremos tres cuestiones. En primer lugar, dado $1\le p<\infty$, caracterizaremos los pares de pesos (u,v) tales que los operadores $M^+_{\mu,d}$ y $M^-_{\mu,d}$ son de tipo débil (p,p) con respecto al par de medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Veremos que para cada operador se puede determinar una condición, $A^+_{p,d}(\mu)$ y $A^-_{p,d}(\mu)$, para la que esto se cumple si, y sólo si, (u,v) es un par de pesos que verifica esta condición.

En segundo lugar, dado $1<p<\infty$, caracterizaremos los pares de pesos (u,v) tales que los operadores $M^+_{\mu,d}$ y $M^-_{\mu,d}$ son de tipo fuerte (p,p) con respecto al par de medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Veremos que para cada operador se puede determinar una condición, denotada por $S^+_{p,d}(\mu)$

y $S^-_{p,d}(\mu)$, respectivamente, para la que esto se cumple si y sólo si (u, v) es un par de pesos que verifica esta condición. Por último estudiaremos el problema anterior para el caso de dos pesos iguales, $u = v$, y veremos que, bajo una cierta condición de duplicación en μ, es equivalente a que se verifique la correspondiente condición $A^+_{p,d}(\mu)$ o $A^-_{p,d}(\mu)$.

Estos resultados sobre maximales diádicos laterales nos permitirán desarrollar la teoría de desigualdades con pesos para el operador maximal diádico $M_{\mu,d}$ en $\mathbb{R}$.

1. Función maximal diádica en $\mathbb{R}^n$

Definición 4.1. Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre compactos y $f \in L^1_{loc}(\mu)$. Definimos la función maximal diádica de f con respecto a la medida μ como

$$M_{\mu,d}f(x) = \sup_{Q\in\mathcal{D}} \left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f|d\mu\right)\chi_Q(x),$$

donde el supremo se está tomando sobre todos los cubos diádicos Q. En el supremo anterior, entendemos que si $\mu(Q) = 0$ para algún cubo diádico Q, entonces el promedio asociado a Q es 0.

Observación 4.2. Observemos que se verifica $M_{\mu,d}f \leq M_\mu f$, ya que en la definición de M_μ el conjunto sobre el que se toma supremo es más grande.

Teorema 4.3. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre compactos. Entonces el operador $M_{\mu,d}$ es de tipo débil $(1, 1)$ con constante 1, es decir, para toda $f \in L^1(\mu)$ se verifica*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\mu,d}f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|d\mu(x),$$

para todo $\lambda > 0$.

Demostración: Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos el operador maximal truncado $M^k_{\mu,d}$ definido por

$$M^k_{\mu,d}f(x) = \sup_{Q\in\mathcal{D},l(Q)\leq 2^k} \left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f|d\mu\right)\chi_Q(x).$$

Sea f una función acotada de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$. Para cada $\lambda > 0$ definimos $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : M^k_{\mu,d}f(x) > \lambda\}$. Si $x \in E_\lambda$, entonces existe $Q_x \in \mathcal{D}$ con $l(Q_x) \leq 2^k$ y $x \in Q_x$ tal que

$$\frac{1}{\mu(Q_x)}\int_{Q_x} |f|d\mu > \lambda.$$

Tenemos entonces un recubrimiento de E_λ por cubos diádicos $\{Q_x\}_{x\in E_\lambda}$ de lado acotado. Luego, podemos extraer un subrecubrimiento maximal de $\{Q_x\}$, numerable y disjunto $\{Q_j\}_j$. Es decir, $\{Q_j\}_j$ es tal que $\bigcup_{x\in E_\lambda} Q_x = \bigcup_j Q_j$, y para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $x \in E_\lambda$ tal que $Q_x = Q_j$. Entonces tenemos,

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : M^k_{\mu,d}f(x) > \lambda\}) \leq& \mu\left(\bigcup_{x\in E_\lambda} Q_x\right) = \mu\left(\bigcup_j Q_j\right) = \sum_j \mu(Q_j)\\ <& \frac{1}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j} |f|d\mu = \frac{1}{\lambda}\int_{\bigcup_j Q_j} |f|d\mu \leq \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f|d\mu.\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $k \to \infty$ y usando el *Teorema de la convergencia monótona* obtenemos

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\mu,d} f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu.$$

□

Como consecuencia del resultado anterior, mediante una interpolación, obtenemos el tipo fuerte (p,p) para todo $p > 1$.

Teorema 4.4. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ finita sobre compactos. Entonces $M_{\mu,d}$ es de tipo fuerte (p,p) para todo $p > 1$.*

El operador $M_{\mu,d}$ tiene un papel muy importante en el estudio del operador maximal de Hardy-Littlewood. En la prueba original de Sawyer en [31] del Teorema 2.13, primero se demuestra el resultado para $M_{\mu,d}$. Seguidamente se prueba una propiedad de medias debida a Fefferman y Stein, que relaciona $M_{\mu,d}$ con M_μ, y como consecuencia se obtiene el resultado para M_μ. La propiedad es la siguiente: sea $M_{\mu,k}$ el operador maximal truncado

$$M_{\mu,k} f(x) = \sup_{x \in Q, \ell(Q) \leq 2^k} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f| d\mu,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q con $x \in Q$ y de lado menor o igual que 2^k. Entonces

$$M_{\mu,k} f(x) \leq \frac{2^{3^n+1}}{|Q(0,2^{k+2})|} \int_{Q(0,2^{k+2})} (\tau_{-t} \circ M_{\mu,d} \circ \tau_t) f(x) dt, \tag{4.1}$$

donde $\tau_t g(x) = g(x-t)$ es el operador traslación y $Q(0,2^{k+2})$ es el cubo de centro el origen y lado igual a 2^{k+2}. Es decir, aunque $M_{\mu,d}$ es un operador más pequeño que M_μ, en cierto sentido $M_{\mu,d}$ domina a M_μ.

2. Función maximal diádica lateral

En el resto del capítulo vamos a trabajar en $\mathbb{R}$. En esta sección vamos a definir una función maximal diádica lateral, que tenga propiedades similares a la función maximal lateral estudiada en el capítulo anterior.

2.1. Propiedades de duplicación laterales

Un intervalo diádico en $\mathbb{R}$ es el conjunto $[2^k m, 2^k(m+1))$, donde $k, m \in \mathbb{Z}$. Si $I = [a,b)$ es un intervalo acotado en $\mathbb{R}$, vamos a denotar $I^- = [a, \frac{a+b}{2})$ e $I^+ = [\frac{a+b}{2}, b)$. Observemos que si I es un intervalo diádico, entonces I^+ e I^- también son intervalos diádicos.

Definición 4.5. Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados.

1. Decimos que μ es duplicante a la derecha si existe una constante $D^+(\mu) > 1$ tal que para todo intervalo acotado I se tiene

$$\mu(I) \leq D^+(\mu) \mu(I^+). \tag{4.2}$$

2. Decimos que μ es duplicante a la izquierda si existe una constante $D^-(\mu) > 1$ tal que para todo intervalo acotado I se tiene

$$\mu(I) \leq D^-(\mu)\mu(I^-). \tag{4.3}$$

Observación 4.6. Si μ tiene la propiedad de duplicación entonces μ es duplicante a la derecha y a la izquierda. Veamos que μ duplica a la derecha, el otro caso se probaría de forma análoga. Basta observar que, para cada intervalo I se tiene $I \subset 4I^+$, y por tanto $\mu(I) \leq \mu(4I^+) \leq D(\mu)^2\mu(I^+)$. Luego, $D^+(\mu) = D^-(\mu) = D(\mu)^2 > 1$.

A veces convendrá expresar estas condiciones de duplicación de la siguiente forma.

Proposición 4.7. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados.*

1. *La medida μ es duplicante a la derecha si, y solo si, existe una constante $\widetilde{D}^+(\mu) > 0$ tal que para todo intervalo I se tiene*

$$\mu(I^-) \leq \widetilde{D}^+(\mu)\mu(I^+). \tag{4.4}$$

2. *La medida μ es duplicante a la izquierda si, y solo si, existe una constante $\widetilde{D}^-(\mu) > 0$ tal que para todo intervalo I se tiene*

$$\mu(I^+) \leq \widetilde{D}^-(\mu)\mu(I^-). \tag{4.5}$$

Demostración: Probaremos únicamente 1, la segunda parte se prueba de forma análoga. Supongamos que μ es duplicante a la derecha. Entonces para cada intervalo I podemos escribir, $\mu(I) = \mu(I^-) + \mu(I^+) \leq D^+(\mu)\mu(I^+)$, y por tanto, $\mu(I^-) \leq (D^+(\mu) - 1)\mu(I^+)$. Recíprocamente, supongamos que existe $\widetilde{D}^+(\mu) > 0$ tal que para todo intervalo I se tiene $\mu(I^-) \leq \widetilde{D}^+(\mu)\mu(I^+)$. Si I es un intervalo, entonces sumando $\mu(I^+)$ en (4.4) tenemos $\mu(I) = \mu(I^-) + \mu(I^+) \leq \widetilde{D}^+(\mu)\mu(I^+) + \mu(I^+) = (\widetilde{D}^+(\mu) + 1)\mu(I^+)$. □

Como consecuencia inmediata del resultado anterior obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.8. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados.*

1. *La medida μ es duplicante a la derecha si, y solo si, existe una constante $\widehat{D}^+(\mu) > 1$ tal que para todo intervalo I se tiene*

$$\widehat{D}^+(\mu)\mu(I^-) \leq \mu(I). \tag{4.6}$$

2. *La medida μ es duplicante a la izquierda si, y solo si, existe una constante $\widehat{D}^-(\mu) > 1$ tal que para todo intervalo I se tiene*

$$\widehat{D}^-(\mu)\mu(I^+) \leq \mu(I). \tag{4.7}$$

2.2. Definición de la función maximal diádica lateral

Vamos a definir una primera candidata a función maximal diádica lateral, análoga a la definida por *Lorente* y *Martín-Reyes* en [21]. Dada una función $f \in L^1_{loc}(\mu)$ definimos

$$\widetilde{M}^+_{\mu,d} f(x) = \sup_{I \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\mu(I^+)} \int_{I^+} |f| d\mu \right) \chi_{I^-}(x), \tag{4.8}$$

y

$$\widetilde{M}^{-}_{\mu,d}f(x) = \sup_{I\in\mathcal{D}} \left(\frac{1}{\mu(I^-)}\int_{I^-}|f|d\mu\right)\chi_{I^+}(x), \tag{4.9}$$

Sin embargo esta definición tiene un problema, estas funciones maximales no son de tipo débil $(1,1)$ para toda medida de Borel μ en $\mathbb{R}$ finitas sobre conjuntos acotados, a diferencia de lo que ocurre con M^+_μ. De hecho, vamos a caracterizar las medidas para las que este operador es de tipo débil $(1,1)$.

Proposición 4.9. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita en cada conjunto acotado. El operador $\widetilde{M}^{+}_{\mu,d}$ es de tipo débil $(1,1)$ si, y solo si, μ es duplicante a la derecha para intervalos diádicos.*

Demostración: Supongamos que $\widetilde{M}^{+}_{\mu,d}$ es de tipo débil $(1,1)$, es decir, existe $C>0$ tal que para toda $f\in L^1(\mu)$ se tiene

$$\mu(\{x\in\mathbb{R}:\widetilde{M}^{+}_{\mu,d}f(x)>\lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}|f|d\mu,$$

para todo $\lambda>0$. Sean $J\in\mathcal{D}$, $f=\chi_{J^+}$ y $0<\lambda<1$. Entonces, si $x\in J^-$ tenemos

$$\begin{aligned}\widetilde{M}^{+}_{\mu,d}(\chi_{J^+})(x) =& \sup_{I\in\mathcal{D}}\left(\frac{1}{\mu(I^+)}\int_{I^+}\chi_{J^+}d\mu\right)\chi_{I^-}(x) = \sup_{I\in\mathcal{D}}\left(\frac{\mu(I^+\cap J^+)}{\mu(I^+)}\right)\chi_{I^-}(x)\\ &\geq \left(\frac{\mu(J^+\cap J^+)}{\mu(J^+)}\right)\chi_{J^-}(x) = 1 > \lambda.\end{aligned}$$

Entonces tenemos,

$$\mu(J^-)\leq\mu(\{x\in\mathbb{R}:\widetilde{M}^{+}_{\mu,d}f(x)>\lambda\})\leq\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}\chi_{J^+}d\mu = \frac{C}{\lambda}\mu(J^+),$$

luego hemos obtenido (4.4), y por tanto μ es duplicante a la derecha para todo $J\in\mathcal{D}$. Recíprocamente, supongamos que μ es duplicante a la derecha para intervalos diádicos. Sea $x\in\mathbb{R}$ e $I\in\mathcal{D}$ tal que $x\in I^-$, entonces

$$\frac{1}{\mu(I^+)}\int_{I^+}|f|d\mu \leq \frac{D^+(\mu)}{\mu(I)}\int_{I^+}|f|d\mu \leq \frac{D^+(\mu)}{\mu(I)}\int_{I}|f|d\mu \leq D^+(\mu)M_{\mu,d}f(x),$$

y tomando supremo sobre tales intervalo diádicos I obtenemos $\widetilde{M}^{+}_{\mu,d}f(x)\leq D^+(\mu)M_{\mu,d}f(x)$. Como $M_{\mu,d}$ es de tipo débil $(1,1)$, entonces tenemos

$$\mu(\{x\in\mathbb{R}:\widetilde{M}^{+}_{\mu,d}f(x)>\lambda\})\leq\mu\left(\left\{x\in\mathbb{R}:\widetilde{M}_{\mu,d}f(x)>\frac{\lambda}{D^+(\mu)}\right\}\right)\leq\frac{D^+(\mu)}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}|f|d\mu,$$

para todo $\lambda>0$. □

Análogamente se prueba que el resultado para $\widetilde{M}^{-}_{\mu,d}$.

Proposición 4.10. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita en cada conjunto acotado. El operador $\widetilde{M}^{-}_{\mu,d}$ es de tipo débil $(1,1)$ si, y solo si, μ es duplicante a la izquierda para intervalos diádicos.*

Como nos gustaría que el operador maximal diádico lateral sea se tipo débil $(1,1)$ independientemente de la medida, esto motiva la siguiente definición, que será con la que trabajaremos el resto del capítulo.

Definición 4.11. Dada una función $f \in L^1_{loc}(\mu)$, definimos la función maximal diádica lateral a la derecha como

$$M^+_{\mu,d} f(x) = \sup_{I \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\mu(I)} \int_{I^+} |f| d\mu \right) \chi_{I^-}(x). \tag{4.10}$$

Análogamente se define la maximal diádica lateral a la izquierda,

$$M^-_{\mu,d} f(x) = \sup_{I \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\mu(I)} \int_{I^-} |f| d\mu \right) \chi_{I^+}(x), \tag{4.11}$$

donde en los cocientes anteriores utilizamos la convención $\frac{0}{0} = 0$.

Observación 4.12. Como consecuencia inmediata de la definición anterior se obtiene

$$M^+_{\mu,d} f(x), M^-_{\mu,d} f(x) \leq M_{\mu,d} f(x) \leq M^+_{\mu,d} f(x) + M^-_{\mu,d} f(x). \tag{4.12}$$

Como $M_{\mu,d}$ es de tipo débil $(1,1)$ y de tipo fuerte (p,p) para todo $p > 1$, de la observación anterior se desprende el siguiente resultado.

Proposición 4.13. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Entonces los operadores $M^+_{\mu,d}$ y $M^-_{\mu,d}$ son de tipo débil $(1,1)$, y tipo fuerte (p,p) para todo $p > 1$.*

2.3. Relación de $M^+_{\mu,d}$ con M^+_μ

Ahora vamos a estudiar la relación de M_μ con el operador maximal diádico lateral a la derecha $M^+_{\mu,d}$. Veremos que $M^+_{\mu,d}$ es menor que M^+_μ y, bajo una condición de duplicación vamos a probar que, en cierto sentido, $M^+_{\mu,d}$ domina a M^+_μ.

Proposición 4.14. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados. Entonces se verifican las desigualdades siguientes:*

1. *$M^+_{\mu,d} f(x) \leq M^+_\mu f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*
2. *$M^-_{\mu,d} f(x) \leq M^-_\mu f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Sean $x \in \mathbb{R}$ e $I = [a,b)$ un intervalo diádico tal que $x \in I^-$. Entonces tenemos,

$$\frac{1}{\mu(I)} \int_{I^+} |f| d\mu \leq \frac{1}{\mu[x,b)} \int_{I^+} |f| d\mu \leq \frac{1}{\mu[x,b)} \int_{[x,b)} |f| d\mu \leq M^+_\mu f(x),$$

y tomando supremo sobre tales intervalos diádicos obtenemos $M^+_{\mu,d} f(x) \leq M^+_\mu f(x)$. Análogamente se prueba la desigualdad para operadores laterales a la izquierda. □

Observación 4.15. Observemos que las desigualdades de la proposición anterior no son, en general, igualdades. Si consideramos $f = \chi_{(0,1)}$, entonces para cada $x < 0$ tenemos $M^+_{\mu,d} f(x) = 0$, ya que para todo intervalo diádico I con $x \in I^-$ se verifica $I \subset (-\infty, 0)$, y por tanto, los promedios de $M^+_{\mu,d} f(x)$ son todos nulos. Sin embargo, para $x < 0$ se tiene $M^+_\mu f(x) > 0$.

Para obtener una desigualdad similar a (4.1), definimos el siguiente operador,

$$N_\mu^+ f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{\mu[x, x+2h)} \int_{[x+h,x+2h)} |f| d\mu.$$

Veamos que $N_\mu^+ f(x) \leq M_\mu^+ f(x)$. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $h > 0$, entonces

$$\frac{1}{\mu[x, x+2h)} \int_{[x+h,x+2h)} |f| d\mu \leq \frac{1}{\mu[x, x+2h)} \int_{[x,x+2h)} |f| d\mu \leq M_\mu^+ f(x),$$

y por tanto $N_\mu^+ f(x) \leq M_\mu^+ f(x)$.

Proposición 4.16. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados y duplicante a la derecha. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que $M_\mu^+ f(x) \leq C N_\mu^+ f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Sea $x \in \mathbb{R}$ y $h > 0$. Usando la caracterización (4.6) de la condición de duplicación a la derecha tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu[x, x+h)} \int_{[x,x+h)} |f| d\mu &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu[x, x+h)} \int_{\left[x+\frac{h}{2^{k+1}}, x+\frac{h}{2^k}\right)} |f| d\mu \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu\left[x, x+\frac{h}{2^k}\right)}{\mu[x, x+h)} \frac{1}{\mu\left[x, x+\frac{h}{2^k}\right)} \int_{\left[x+\frac{h}{2^{k+1}}, x+\frac{h}{2^k}\right)} |f| d\mu \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\widehat{D}^+(\mu)}\right)^k \frac{1}{\mu\left[x, x+\frac{h}{2^k}\right)} \int_{\left[x+\frac{h}{2^{k+1}}, x+\frac{h}{2^k}\right)} |f| d\mu \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\widehat{D}^+(\mu)}\right)^k\right) N_\mu^+ f(x) = C N_\mu^+ f(x),
\end{aligned}$$

donde $C = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\widehat{D}^+(\mu)}\right)^k < \infty$, ya que $\widehat{D}^+(\mu) > 1$. Entonces tomando supremo sobre $h > 0$ obtenemos $M_\mu^+ f(x) \leq C N_\mu^+ f(x)$. □

Por tanto, si μ es duplicante a la derecha, entonces N_μ^+ y M_μ^+ son operadores equivalentes puntualmente. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ definimos los operadores maximales truncados siguientes

$$N_{\mu,k}^+ f(x) = \sup_{0<h\leq 2^k} \frac{1}{\mu[x, x+2h)} \int_{[x+h,x+2h)} |f| d\mu,$$

y

$$M_{\mu,k}^+ f(x) = \sup_{0<h\leq 2^k} \frac{1}{\mu[x, x+h)} \int_{[x,x+h)} |f| d\mu,$$

para cada $f \in L^1_{loc}(\mu)$.

Teorema 4.17. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos compactos y con la propiedad de duplicación. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que para todos $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ y $f \in L^1_{loc}(\mu)$ se tiene*

$$M_{\mu,k}^+ f(x) \leq N_{\mu,k}^+ f(x) \leq \frac{C}{2^{k+4}} \int_0^{2^{k+4}} \left(\tau_{-t} \circ M_{\mu_t,d}^+ \circ \tau_t\right) f(x) dt, \tag{4.13}$$

donde $\tau_t f(x) = f(x-t)$ y μ_t es la medida definida por $\mu_t(E) = \mu(E-t)$.

Demostración Si μ tiene la propiedad de duplicación entonces, por la Observación 4.6, μ es duplicante a la derecha y por tanto, la primera desigualdad se puede probar de la misma forma que $M_\mu^+ f(x) \leq C N_\mu^+ f(x)$. Sean $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ y $f \geq 0$ localmente integrable. En primer lugar, tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\tau_{-t} \circ M^+_{\mu_t,d} \circ \tau_t\right) f(x) &= M^+_{\mu_t,d}\left(\tau_t f\right)(x+t) \\
&= \sup_{I \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\mu_t(I)} \int_{I^+} \tau_t f(y) d\mu_t(y) \right) \chi_{I^-}(x+t) \\
&= \sup_{I \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\mu_t(I)} \int_{I^+} f(y-t) d\mu_t(y) \right) \chi_{I^-}(x+t) \\
&= \sup_{I \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\mu(I-t)} \int_{I^+-t} f(y) d\mu(y) \right) \chi_{I^-}(x+t).
\end{aligned}$$

Observemos que existe h_0 con $0 < h_0 \leq 2^k$ tal que

$$\frac{1}{2} N^+_{\mu,k} f(x) \leq \frac{1}{\mu[x, x+2h_0)} \int_{[x+h_0, x+2h_0)} f(y) d\mu(y).$$

Sea $j \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{j-1} < h_0 \leq 2^j$ (y por tanto $j \leq k$). Consideremos el conjunto

$$\Omega = \left\{ t \in (0, 2^{k+4}) : \text{ existe } I \in \mathcal{D}, x+t \in I^-, |I| = 2^{j+2} \text{ y } [x+h_0, x+2h_0) \subset I^+ - t \right\},$$

y estimemos su medida de Lebesgue. Consideremos los intervalos diádicos I de longitud 2^{j+2} tales que si $I^- = [a, b)$, entonces $x < a$ y $b < x + h_0 + 2^{k+3}$. Observemos que como $b = a - 2^{j+1}$, la condición anterior es $x + 2^{j+1} < b < x + h_0 + 2^{k+3}$. El número de tales intervalos diádicos es $\frac{2^{k+3}}{2^{j+1}}$. Sea I uno de los intervalos de la definición de Ω, es decir, $I^+ = [b, b + 2^{j+1})$. Sea $t_0 = b - (x + h_0)$ y veamos que $(t_0, t_0 + h_0) \subset \Omega$. Por una parte observemos que $t_0 > 0$, ya que $x + h_0 \leq x + 2^j < x + 2^{j+1} < b$. Para ver que $t_0 + h_0 < 2^{k+4}$ observemos que

$$t_0 + h_0 = b - x < h_0 + 2^{k+3} \leq 2^j + 2^{k+3} \leq 2^k + 2^{k+3} \leq 2^{k+4}.$$

Como $I^+ = [b, b + 2^{j+1})$ y $|I| = 2^{j+2}$, entonces $I^- = [b - 2^{j+1}, b)$. Para ver que $x + t \in I^-$, observemos que $t_0 < t < t_0 + h_0$ implica

$$b - 2^{j+1} < b - h_0 = x + t_0 < x + t < x + t_0 + h_0 = b,$$

y por tanto $x + t \in I^-$. Por ultimo probaremos que $[x + h_0 + t, x + 2h_0 + t) \subset I^+$ para todo $t \in (t_0, t_0 + h_0)$. Usando que $h_0 \leq 2^j$ tenemos,

$$b = x + h_0 + t_0 \leq x + h_0 + t < x + 2h_0 + t = b + h_0 + t - t_0 < b + 2h_0 \leq b + 2^{j+1},$$

ya que $t - t_0 < h_0$. Hemos probado así que $(t_0, t_0 + h_0) \subset \Omega$. Sea J otro de los intervalos diádicos de la definición de Ω, y sea $J^+ = [d, d + 2^{j+1})$. Tomemos $t_1 = d - (x + h_0)$, y de la misma forma que antes obtenemos $(t_1, t_1 + h_0) \subset \Omega$. Si I y J son intervalos diádicos disjuntos, entonces $(t_0, t_0 + h_0) \cap (t_1, t_1 + h_0) = \emptyset$. Por tanto, como existen $\frac{2^{k+3}}{2^{j+1}}$ intervalos diádicos verificando esto, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\frac{C}{8} 2^{k+4} < C h_0 \frac{2^{k+3}}{2^{j+1}} \leq |\Omega| \leq 2^{k+4}.$$

Ahora bien, para cada $t \in \Omega$ existe un intervalo diádico $I \in \mathcal{D}$ tal que $x+t \in I^-$, $|I| = 2^{j+2}$ y $[x+h_0, x+2h_0) \subset I^+ - t$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}N^+_{\mu,k}f(x) \leq & \frac{1}{\mu[x, x+2h_0)} \int_{[x+h_0, x+2h_0)} f(y)d\mu(y) \\ \leq & \frac{\mu(I-t)}{\mu[x, x+2h_0)} \left(\frac{1}{\mu(I-t)} \int_{I^+-t} f(y)d\mu(y) \right) \chi_{I^-}(x+t).\end{aligned}$$

Si denotamos $J = [x, x+2h_0)$, entonces $J^+ = [x+h_0, x+2h_0)$. Ahora bien, como $J^+ \subset I^+ - t$ entonces $J \subset I - t$. Observemos que $|J| = 2h_0 > 2^j$, y $|I-t| = |I| = 2^{j+2}$, por tanto $I - t \subset 9J$. Aplicando la condición de duplicación de μ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}N^+_{\mu,k}f(x) \leq & \frac{\mu(9J)}{\mu(J)} \left(\frac{1}{\mu(I-t)} \int_{I^+-t} f(y)d\mu(y) \right) \chi_{I^-}(x+t) \\ \leq & D(\mu)^2 \left(\frac{1}{\mu(I-t)} \int_{I^+-t} f(y)d\mu(y) \right) \chi_{I^-}(x+t) \\ \leq & D(\mu)^2 \left(\tau_{-t} \circ M^+_{\mu_t,d} \circ \tau_t \right) f(x).\end{aligned}$$

Por tanto, podemos concluir la prueba

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}N^+_{\mu,k}f(x) &\leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \frac{1}{2}N^+_{\mu,k}f(x)dt \\ &\leq \frac{D(\mu)^2}{|\Omega|} \int_\Omega \left(\tau_{-t} \circ M^+_{\mu_t,d} \circ \tau_t \right) f(x)dt \\ &\leq \frac{D(\mu)^2 C}{2^{k+4}} \int_0^{2^{k+4}} \left(\tau_{-t} \circ M^+_{\mu_t,d} \circ \tau_t \right) f(x)dt.\end{aligned}$$

□

Sería interesante conocer si el resultado anterior es cierto suponiendo únicamente que μ es duplicante a la derecha.

3. Pares de pesos $A^+_{p,d}(\mu)$ y $A^-_{p,d}(\mu)$

Definición 4.18. Sean u y v dos pesos en $\mathbb{R}$.

- Si $1 < p < \infty$, decimos que (u, v) verifica la condición $A^+_{p,d}(\mu)$, o simplemente $(u, v) \in A^+_{p,d}(\mu)$, si existe $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{\mu(I)} \int_{I^-} u(x)d\mu(x) \right) \left(\frac{1}{\mu(I)} \int_{I^+} v(x)^{1-p'} d\mu(x) \right)^{p-1} \leq C \tag{4.14}$$

  para todo intervalo diádico $I \in \mathcal{D}$.

- Diremos que (u, v) verifica la condición $A^+_{1,d}(\mu)$, o simplemente $(u, v) \in A^+_{1,d}(\mu)$, si existe $C > 0$ tal que para cada intervalo diádico $I \in \mathcal{D}$ se tiene

$$\frac{1}{\mu(I)} \int_{I^-} u(x)d\mu(x) \leq Cv(x) \tag{4.15}$$

  para casi todo $x \in I^+$

- Si $1 < p < \infty$, decimos que (u, v) verifica la condición $A^-_{p,d}(\mu)$, o simplemente $(u, v) \in A^-_{p,d}(\mu)$, si existe $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^+} u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^-} v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1} \leq C \tag{4.16}$$

  para todo intervalo diádico $I \in \mathcal{D}$.

- Diremos que (u, v) verifica la condición $A^-_{1,d}(\mu)$, o simplemente $(u, v) \in A^-_{1,d}(\mu)$ si existe $C > 0$ tal que para cada intervalo diádico $I \in \mathcal{D}$ se tiene

$$\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^+} u(x)d\mu(x) \leq Cv(x) \tag{4.17}$$

  para casi todo $x \in I^-$

Como el conjunto de los intervalos diádicos es numerable, entonces son triviales las siguientes equivalencias.

Teorema 4.19 (Caracterización de $A^+_{1,d}(\mu)$)**.** *Sean μ una medida en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos compactos y (u, v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Son equivalentes:*

1. $(u, v) \in A^+_{1,d}(\mu)$.
2. *Existe $C > 0$ tal que*

$$M^-_{\mu,d}u(x) \leq Cv(x) \tag{4.18}$$

   para casi todo $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.20 (Caracterización de $A^-_{1,d}(\mu)$)**.** *Sean μ una medida en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos compactos y (u, v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Son equivalentes:*

1. $(u, v) \in A^-_{1,d}(\mu)$.
2. *Existe $C > 0$ tal que*

$$M^+_{\mu,d}u(x) \leq Cv(x) \tag{4.19}$$

   para casi todo $x \in \mathbb{R}$.

De forma análoga a la Proposición 3.4 se prueban los siguientes resultados.

Proposición 4.21. *Sea $1 \leq p < \infty$, entonces $(u, v) \in A^+_{p,d}(\mu)$ si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^+} f d\mu\right)^p \leq \frac{C}{u_\mu(I^-)}\int_{I^+} f^p v d\mu, \tag{4.20}$$

para toda función no negativa f, y todo intervalo diádico $I \in \mathcal{D}$, donde en el cociente de (4.20) si $u_\mu(I^-) = 0$ usaremos las siguientes convenciones: $\frac{a}{0} = \infty$ para $a > 0$ y $\frac{0}{0} = 0$.

Proposición 4.22. *Sea $1 \leq p < \infty$, entonces $(u, v) \in A^-_{p,d}(\mu)$ si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^-} f d\mu\right)^p \leq \frac{C}{u_\mu(I^+)}\int_{I^-} f^p v d\mu, \tag{4.21}$$

para toda función no negativa f, y todo intervalo diádico $I \in \mathcal{D}$, donde en el cociente de (4.21) si $u_\mu(I^+) = 0$ usaremos las siguientes convenciones: $\frac{a}{0} = \infty$ para $a > 0$ y $\frac{0}{0} = 0$.

4. Caracterización de los pares de pesos (u, v) para los que $M^+_{\mu,d}$ es de tipo débil (p, p)

En esta sección probaremos que el operador M^+_μ es de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$ si y solo si $(u,v) \in A^+_{p,d}(\mu)$. Vamos a seguir la demostración de *Lorente* y *Martín-Reyes* [21]. En primer lugar necesitaremos el siguiente lema debido a *Ombrosi* [27].

Lema 4.23. *Sean μ una medida en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados y $1 \le p < \infty$. Sean (u,v) un par de pesos en $\mathbb{R}$ verificando la condición $A^+_{p,d}(\mu)$ y $f \in L^1(\mu)$ con $f \ge 0$. Sean $\nu > 0$ y $\{I_j\}_{j\in\Gamma_\nu}$ una familia de intervalos diádicos de longitud acotada tal que la familia $\{I_j^-\}_{j\in\Gamma_\nu}$ es disjunta dos a dos y verifica*

$$\nu < \frac{1}{\mu(I_j)} \int_{I_j^+} f(x)d\mu(x) \le 2\nu, \tag{4.22}$$

para cada $j \in \Gamma_\nu$. Entonces se tiene

$$\sum_{j\in\Gamma_\nu} \int_{I_j^-} u(x)d\mu(x) \le \frac{2^{p+2}C}{\nu^p} \int_{\bigcup_{j\in\Gamma_\nu} I_j^+} f(x)^p v(x)d\mu(x), \tag{4.23}$$

donde C es la constante de la condición $A^+_{p,d}(\mu)$.

Demostración: Para cada entero $m \ge 0$ consideremos

$$i_m = \{j \in \Gamma_\nu : \text{ existen exactamente } m \text{ intervalos } I_s \text{ tales que } I_j^+ \subsetneqq I_s^+ \text{ con } s \in \Gamma_\nu\},$$

y $\sigma_m = \bigcup_{j\in i_m} I_j^+$. Estos conjuntos tienen las siguientes propiedades:

1. Es claro que $\Gamma_\nu = \bigcup_{m=0}^\infty i_m$. Además, si $j_1, j_2 \in i_m$ con $j_1 \ne j_2$, entonces $I_{j_1}^+ \not\subseteq I_{j_2}^+$ y $I_{j_2}^+ \not\subseteq I_{j_1}^+$. Supongamos por reducción al absurdo que $I_{j_1}^+ \subset I_{j_2}^+$. Como $j_2 \in i_m$, entonces existe exactamente m intervalos I_s con $s \in \Gamma_\nu$ tales que $I_{j_2}^+ \subsetneqq I_s^+$. Entonces tenemos, $I_{j_1}^+ \subsetneqq I_{j_2}^+ \subsetneqq I_s^+$. Esto es una contradicción, pues $j_1 \in i_m$ y hemos probado que $I_{j_1}^+$ está contenido en al menos $m+1$ intervalos. Como $I_{j_1}^+$ e $I_{j_2}^+$ son intervalos diádicos, entonces $I_{j_1}^+ \cap I_{j_2}^+ = \emptyset$. Por tanto,

$$\int_{\sigma_m} f(x)d\mu(x) = \sum_{j\in i_m} \int_{I_j^+} f(x)d\mu(x). \tag{4.24}$$

2. Si $j \in i_{m+1}$, entonces para cada k con $0 \le k \le m$, existe un único $j_k \in i_k$ tal que $I_j^+ \subset I_{j_k}^+$. Por tanto, $\sigma_{m+1} \subset \sigma_m$, y esto implica

$$\int_{\sigma_{m+1}} f(x)d\mu(x) \le \int_{\sigma_m} f(x)d\mu(x). \tag{4.25}$$

Fijemos un entero $m_0 \ge 0$ y $j_0 \in i_{m_0}$. Entonces existen exactamente m_0 intervalos diádicos I_s con $s \in \Gamma_\nu$ tales que $I_{j_0}^+ \subsetneqq I_s^+$. Si I_j, con $j \in \Gamma_\nu$, es tal que $I_j^+ \subsetneqq I_{j_0}^+$, entonces $j \in i_m$

para algún $m > m_0$. Además, como I_j^- e $I_{j_0}^-$ son disjuntos y tenemos $I_j^+ \subsetneqq I_{j_0}^+$, entonces $I_j \subset I_{j_0}^+$. Teniendo esto en cuenta podemos escribir,

$$\bigcup_{m>m_0} \left(\bigcup_{\{j\in i_m : I_j^+ \subsetneqq I_{j_0}^+\}} I_j \right) \subset I_{j_0}^+, \tag{4.26}$$

y por tanto,

$$\sum_{m>m_0} \sum_{\{j\in i_m : I_j^+ \subsetneqq I_{j_0}^+\}} \mu(I_j) \leq \mu(I_{j_0}^+). \tag{4.27}$$

Para todo $m > m_0$, en (4.24) obtenemos

$$\int_{\sigma_m \cap I_{j_0}^+} f(x)d\mu(x) = \sum_{\{j\in i_m : I_j^+ \subsetneqq I_{j_0}^+\}} \int_{I_j^+} f(x)d\mu(x).$$

Teniendo en cuenta las dos últimas expresiones y que por hipótesis para cada $j \in \Gamma_\nu$ se tiene (4.22), tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{m>m_0} \int_{\sigma_m \cap I_{j_0}^+} f(x)d\mu(x) &= \sum_{m>m_0} \sum_{\{j\in i_m : I_j^+ \subsetneqq I_{j_0}^+\}} \int_{I_j^+} f(x)d\mu(x) \\
&\leq 2\nu \sum_{m>m_0} \sum_{\{j\in i_m : I_j^+ \subsetneqq I_{j_0}^+\}} \mu(I_j) \\
&\leq 2\nu\mu(I_{j_0}^+) < 2\frac{\mu(I_{j_0}^+)}{\mu(I_{j_0})} \int_{I_{j_0}^+} f(x)d\mu(x) \\
&\leq 2 \int_{I_{j_0}^+} f(x)d\mu(x).
\end{aligned}$$

En particular,

$$\sum_{m=m_0+1}^{m_0+4} \int_{\sigma_m \cap I_{j_0}^+} f(x)d\mu(x) \leq 2 \int_{I_{j_0}^+} f(x)d\mu(x),$$

y por tanto, existe un entero m, con $m_0 + 1 \leq m \leq m_0 + 4$, tal que

$$\int_{\sigma_m \cap I_{j_0}^+} f(x)d\mu(x) \leq \frac{2}{4} \int_{I_{j_0}^+} f(x)d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_{I_{j_0}^+} f(x)d\mu(x).$$

Como $\sigma_{m_0+4} \subset \sigma_m$, entonces

$$\int_{\sigma_{m_0+4} \cap I_{j_0}^+} f(x)d\mu(x) \leq \int_{\sigma_m \cap I_{j_0}^+} f(x)d\mu(x) \leq \frac{1}{2} \int_{I_{j_0}^+} f(x)d\mu(x).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{I_{j_0}^+ \setminus \sigma_{m_0+4}} f(x)d\mu(x) &= \int_{I_{j_0}^+} f(x)d\mu(x) - \int_{\sigma_{m_0+4} \cap I_{j_0}^+} f(x)d\mu(x) \\
&> \int_{I_{j_0}^+} f(x)d\mu(x) - \frac{1}{2} \int_{I_{j_0}^+} f(x)d\mu(x) \\
&= \frac{1}{2} \int_{I_{j_0}^+} f(x)d\mu(x) > \frac{\nu}{2}\mu(I_{j_0}).
\end{aligned}$$

Hemos probado entonces que fijado m_0 y $j_0 \in i_{m_0}$ se tiene

$$1 < \frac{2}{\nu}\frac{1}{\mu(I_{j_0})}\int_{I_{j_0}^+\setminus\sigma_{m_0+4}} f(x)d\mu(x). \tag{4.28}$$

Distingamos dos casos. Supongamos en primer lugar $p = 1$. Como $(u, v) \in A_{1,d}^+(\mu)$, para cada j se tiene

$$v(x)^{-1} \leq C\left(\frac{1}{\mu(I_j)}\int_{I_j^-} ud\mu\right)^{-1},$$

para casi todo $x \in I_j^+$. Entonces usando (4.28) tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\Gamma_\nu}\int_{I_j^-} ud\mu =& \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j\in i_m}\int_{I_j^-} ud\mu \\
\leq& \frac{2}{\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j\in i_m}\left(\int_{I_j^-} ud\mu\right)\frac{1}{\mu(I_j)}\int_{I_j^+\setminus\sigma_{m+4}} fvv^{-1}d\mu \\
\leq& \frac{2C}{\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j\in i_m}\int_{I_j^+\setminus\sigma_{m+4}} fvd\mu \\
=& \frac{2C}{\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\sigma_m\setminus\sigma_{m+4}} fvd\mu.
\end{aligned}$$

Supongamos ahora $p > 1$. Entonces usando (4.28) y la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\Gamma_\nu}\int_{I_j^-} ud\mu =& \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j\in i_m}\int_{I_j^-} ud\mu \\
\leq& \left(\frac{2}{\nu}\right)^p\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j\in i_m}\left(\int_{I_j^-} ud\mu\right)\left(\frac{1}{\mu(I_j)}\int_{I_j^+\setminus\sigma_{m+4}} fv^{\frac{1}{p}}v^{-\frac{1}{p}}d\mu\right)^p \\
\leq& \left(\frac{2}{\nu}\right)^p\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j\in i_m}\frac{1}{\mu(I_j)^p}\left(\int_{I_j^-} ud\mu\right)\left(\int_{I_j^+\setminus\sigma_{m+4}} v^{1-p'}d\mu\right)^{p-1}\int_{I_j^+\setminus\sigma_{m+4}} f^pvd\mu \\
\leq& \left(\frac{2}{\nu}\right)^p\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j\in i_m}\frac{1}{\mu(I_j)^p}\left(\int_{I_j^-} ud\mu\right)\left(\int_{I_j^+} v^{1-p'}d\mu\right)^{p-1}\int_{I_j^+\setminus\sigma_{m+4}} f^pvd\mu \\
\leq& C\left(\frac{2}{\nu}\right)^p\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j\in i_m}\int_{I_j^+\setminus\sigma_{m+4}} f^pvd\mu \\
=& C\left(\frac{2}{\nu}\right)^p\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\sigma_m\setminus\sigma_{m+4}} f^pvd\mu.
\end{aligned}$$

Para todo $p \geq 1$ hemos probado entonces

$$\sum_{j\in\Gamma_\nu}\int_{I_j^-} ud\mu \leq C\left(\frac{2}{\nu}\right)^p\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\sigma_m\setminus\sigma_{m+4}} f^pvd\mu. \tag{4.29}$$

Entonces podemos concluir la prueba,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\Gamma_\nu}\int_{I_j^-} ud\mu \leq & C\left(\frac{2}{\nu}\right)^p \sum_{m=0}^{\infty}\int_{\sigma_m\setminus\sigma_{m+4}} f^p v d\mu \\ = & C\left(\frac{2}{\nu}\right)^p \sum_{m=0}^{\infty}\left(\int_{\sigma_m} f^p v d\mu - \int_{\sigma_{m+4}} f^p v d\mu\right) \\ = & C\left(\frac{2}{\nu}\right)^p \left(\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\sigma_m} f^p v d\mu - \sum_{m=4}^{\infty}\int_{\sigma_m} f^p v d\mu\right) \\ = & C\left(\frac{2}{\nu}\right)^p \sum_{m=0}^{3}\int_{\sigma_m} f^p v d\mu \\ \leq & 4C\left(\frac{2}{\nu}\right)^p \int_{\bigcup_{j\in\Gamma_\nu} I_j^+} f^p v d\mu.\end{aligned}$$

□

Teorema 4.24. *Sean μ una medida de Borel finita sobre conjuntos acotados en $\mathbb{R}$ y $1 \leq p < \infty$. Son equivalentes:*

1. *$(u, v) \in A_{p,d}^+(\mu)$.*
2. *$M_{\mu,d}^+$ es de tipo débil (p, p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que para cada $f \in L^p(vd\mu)$ se verifica*

$$\int_{\{y\in\mathbb{R}: M_{\mu,d}^+ f(y)>\lambda\}} u(x)d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x)d\mu(x), \tag{4.30}$$

para todo $\lambda > 0$.

Demostración: Supongamos que $(u, v) \in A_{p,d}^+(\mu)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos el operador maximal truncado $M_{\mu,d}^{+,k}$ definido como

$$M_{\mu,d}^{+,k} = \sup_{I\in\mathcal{D}, |I|\leq 2^k}\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^+} |f|d\mu\right)\chi_{I^-}(x), \tag{4.31}$$

donde el supremos se toma sobre todos los intervalos diádicos de longitud menor o igual que 2^k. Observemos que $M_{\mu,d}^{+,k} \uparrow M_{\mu,d}^+$ cuando $k \to \infty$. Sean $f \geq 0$ acotada de soporte compacto y $\lambda > 0$. Definimos los conjuntos $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R} : M_{\mu,d}^{+,k} f(x) > \lambda\}$ y $\mathcal{F}_\lambda = \{I \in \mathcal{D} : |I| \leq 2^k \text{ y } \frac{1}{\mu(I)}\int_{I^+} f d\mu > \lambda\}$. Entonces tenemos la siguiente igualdad

$$E_\lambda = \bigcup_{I\in\mathcal{F}_\lambda} I^-.$$

Sea $\{I_j\}$ la familia de intervalos diádicos tales que $\{I_j^-\}$ es maximal en $\{I^- : I \in \mathcal{F}_\lambda\}$. Entonces $\{I_j^-\}$ es una familia de intervalos diádicos disjuntos. Sin embargo, la familia asociada $\{I_j^+\}$ no es disjunta en general. Para cada k entero con $k \geq 0$, consideremos la familia de índices

$$c_k = \left\{j : 2^k\lambda < \frac{1}{\mu(I_j)}\int_{I_j^+} f(x)d\mu(x) \leq 2^{k+1}\lambda\right\}.$$

Entonces podemos aplicar el lema anterior y obtenemos

$$\sum_{j\in c_k}\int_{I_j^-} u(x)d\mu(x) \leq \frac{2^{p+2}C}{(2^k\lambda)^p}\int_{\mathbb{R}} f(x)^p v(x)d\mu(x).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_{\{y\in\mathbb{R}:M_{\mu,d}^{+,k}f(y)>\lambda\}} u(x)d\mu(x) &= \int_{E_\lambda} u(x)d\mu(x) = \sum_j \int_{I_j^-} u(x)d\mu(x)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j\in c_k}\int_{I_j^-} u(x)d\mu(x)\\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{p+2}C}{(2^k\lambda)^p}\int_{\mathbb{R}} f(x)^p v(x)d\mu(x)\\ &= \frac{2^{p+2}\widetilde{C}}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}} f(x)^p v(x)d\mu(x).\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $k\to\infty$ obtenemos la desigualdad deseada.
Recíprocamente, supongamos que $M_{\mu,d}^+$ es de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Sea $I\in\mathcal{D}$ un intervalo diádico y $f\geq 0$ tal que $\int_{I^+} fd\mu > 0$. Entonces si le aplicamos la desigualdad de tipo débil (p,p) a la función $f\chi_{I^+}$ tenemos,

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}:M_{\mu,d}^+(f\chi_{I^+})(x)>\lambda\}} ud\mu \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{I^+} f^p v d\mu \tag{4.32}$$

para todo $\lambda>0$. Observemos que si $x\in I^-$ entonces tenemos,

$$\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^+} fd\mu \leq M_{\mu,d}^+(f\chi_{I^+})(x).$$

Luego tomando $\lambda_0 = \frac{1}{\mu(I)}\int_{I^+} fd\mu$ y $0<\lambda<\lambda_0$ en (4.32) tenemos la inclusión $I^-\subset\{x\in\mathbb{R}: M_{\mu,d}^+(f\chi_{I^+})(x)>\lambda\}$, y por tanto,

$$\int_{I^-} ud\mu \leq \int_{\{x\in\mathbb{R}:M_{\mu,d}^+(f\chi_{I^+})(x)>\lambda\}} ud\mu \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{I^+} f^p v d\mu.$$

Haciendo tender $\lambda\to\lambda_0$ y reordenando en la expresión anterior llegamos a

$$u_\mu(I^-)\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^+} fd\mu\right)^p \leq C\int_{I^+} f^p v d\mu,$$

y esto es (4.20), es decir, $(u,v)\in A_{p,d}^+(\mu)$. □

Análogamente se prueba la caracterización para $M_{\mu,d}^-$.

Teorema 4.25. *Sean μ una medida de Borel finita sobre conjuntos acotados en $\mathbb{R}$ y $1\leq p<\infty$. Son equivalentes:*

1. $(u,v)\in A_{p,d}^-(\mu)$
2. *$M_{\mu,d}^-$ es de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$, es decir, existe una constante $C>0$ tal que para cada $f\in L^p(vd\mu)$ se verifica*

$$\int_{\{y\in\mathbb{R}:M_{\mu,d}^- f(y)>\lambda\}} u(x)d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x)d\mu(x), \tag{4.33}$$

para todo $\lambda>0$.

5. Caracterización de los pares de pesos (u, v) para los que $M^+_{\mu,d}$ es de tipo fuerte (p, p)

En esta sección vamos a estudiar los pares de pesos (u, v) para los que $M^+_{\mu,d}$ es de tipo fuerte (p, p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$.

Teorema 4.26. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados, $1 < p < \infty$ y (u, v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Sea $\sigma = v^{1-p'}$ donde p' es el exponente conjugado de p. Son equivalentes:*

1. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\int_I |M^+_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^+})(x)|^p u(x)d\mu(x) \leq C \int_{I^+} \sigma(x)d\mu(x) < \infty. \qquad (S^+_{p,d}(\mu))$$

   para todo intervalo diádico I tal que $\int_{I^-} ud\mu > 0$.

2. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |M^+_{\mu,d} f(x)|^p u(x)d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x)d\mu(x), \qquad (4.34)$$

   para toda $f \in L^p(vd\mu)$.

Definición 4.27. Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$, y $1 < p < \infty$. Diremos que un par de pesos (u, v) verifica la condición $S^+_{p,d}(\mu)$, o simplemente, $(u, v) \in S^+_{p,d}(\mu)$ si se verifica $(S^+_{p,d}(\mu))$.

Demostración: Supongamos que se verifica (4.34). Entonces, $M^+_{\mu,d}$ es de tipo débil (p, p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Por la caracterización anterior (Teorema 4.24) tenemos que $(u, v) \in A^+_{p,d}(\mu)$, y por tanto $\int_{I^+} \sigma d\mu < \infty$ para todo intervalo diádico I tal que $\int_{I^-} ud\mu > 0$. Por último, si en (4.34) tomamos $f = \sigma\chi_{I^+}$ obtenemos $(S^+_{p,d}(\mu))$.
Recíprocamente, supongamos que $(u, v) \in S^+_{p,d}(\mu)$. Para cada $N \in \mathbb{N}$ consideremos el operador maximal truncado $M^{+,N}_{\mu,d}$ definido como

$$M^{+,N}_{\mu,d} = \sup_{I\in\mathcal{D},|I|\leq 2^N} \left(\frac{1}{\mu(I)} \int_{I^+} |f|d\mu\right) \chi_{I^-}(x),$$

donde el supremos se toma sobre todos los intervalos diádicos de longitud menor o igual que 2^N. Sea $f \geq 0$ acotada y de soporte compacto. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ definimos los conjuntos $\Omega_k = \{x \in \mathbb{R} : M^{+,N}_{\mu,d} f(x) > 2^k\}$ y $\mathcal{F}_k = \{I \in \mathcal{D} : |I| \leq 2^N \text{ y } \frac{1}{\mu(I)} \int_{I^+} f d\mu > 2^k\}$. Entonces tenemos la siguiente igualdad,

$$\Omega_k = \bigcup_{I\in\mathcal{F}_k} I^-.$$

Consideremos los intervalos diádicos $I_{j,k}$ tales que el intervalo $I^-_{j,k}$ es maximal en el conjunto $\{I^- : I \in \mathcal{F}_k\}$. Definamos entonces, $E_{j,k} = I^-_{j,k} \cap \{x \in \mathbb{R} : M^{+,N}_{\mu,d} f(x) \leq 2^{k+1}\}$, y observemos que

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{R} : 2^k < M^{+,N}_{\mu,d} f(x) \leq 2^{k+1}\} &= \Omega_k \cap \{x \in \mathbb{R} : M^{+,N}_{\mu,d} f(x) \leq 2^{k+1}\} \\
&= \left(\bigcup_j I^-_{j,k}\right) \cap \{x \in \mathbb{R} : M^{+,N}_{\mu,d} f(x) \leq 2^{k+1}\} \\
&= \bigcup_j \left(I^-_{j,k} \cap \{x \in \mathbb{R} : M^{+,N}_{\mu,d} f(x) \leq 2^{k+1}\}\right) = \bigcup_j E_{j,k}.
\end{aligned}$$

Observemos que fijado $k \in \mathbb{Z}$, la familia $\{I_{j,k}^-\}_j$ es disjunta, y como $E_{j,k} \subset I_{j,k}^-$, entonces la familia $\{E_{j,k}\}_j$ también es disjunta. Por tanto, podemos estimar,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |M_{\mu,d}^{+,N} f|^p u d\mu &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\{x\in\mathbb{R}: 2^k < M_{\mu,d}^{+,N} f(x) \le 2^{k+1}\}} |M_{\mu,d}^{+,N} f|^p u d\mu \\
&\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{(k+1)p} \int_{\{x\in\mathbb{R}: 2^k < M_{\mu,d}^{+,N} f(x) \le 2^{k+1}\}} u d\mu \\
&= 2^p \sum_{k,j} 2^{kp} \int_{E_{j,k}} u d\mu \\
&\le 2^p \sum_{k,j} \left(\frac{1}{\mu(I_{j,k})} \int_{I_{j,k}^+} f(x) d\mu \right)^p \int_{E_{j,k}} u d\mu \\
&= 2^p \sum_{k,j} \left(\frac{1}{\sigma_\mu(I_{j,k})} \int_{I_{j,k}^+} (f\sigma^{-1}) \sigma d\mu \right)^p \left(\frac{1}{\mu(I_{j,k})} \int_{I_{j,k}} \sigma d\mu \right)^p \int_{E_{j,k}} u d\mu.
\end{aligned}$$

Consideremos el espacio de medida $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}), \nu)$, donde ν está definida como

$$\nu(j,k) = \left(\frac{1}{\mu(I_{j,k})} \int_{I_{j,k}} \sigma d\mu \right)^p \int_{E_{j,k}} u d\mu.$$

Definimos el operador T sobre el conjunto de las funciones localmente integrables (respecto de la medida $\sigma d\mu$) en el conjunto de las funciones en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$,

$$Tg(j,k) = \frac{1}{\sigma_\mu(I_{j,k})} \int_{I_{j,k}^+} g(x)\sigma(x) d\mu(x).$$

Si probamos que T es acotado de $L^p(\sigma d\mu)$ en $\ell^p(\nu)$, entonces habremos terminado la prueba, pues

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |M_{\mu,d}^{+,N} f|^p u d\mu &\le 2^p \sum_{k,j} \left(\frac{1}{\sigma_\mu(I_{j,k})} \int_{I_{j,k}^+} (f\sigma^{-1}) \sigma d\mu \right)^p \left(\frac{1}{\mu(I_{j,k})} \int_{I_{j,k}} \sigma d\mu \right)^p \int_{E_{j,k}} u d\mu \\
&= 2^p \sum_{k,j} \left(T(f\sigma^{-1})(j,k) \right)^p \nu(j,k) \le 2^p C \int_{\mathbb{R}} (f\sigma^{-1})^p \sigma d\mu \\
&= 2^p C \int_{\mathbb{R}} f^p v d\mu,
\end{aligned}$$

y tomando límite cuando $N \to \infty$ obtenemos la desigualdad (4.34).

Veamos en primer lugar que T es acotado de $L^\infty(\sigma d\mu)$ en $\ell^\infty(\nu)$. Sea $g \in L^\infty(\sigma d\mu)$, entonces para cada $(j,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tenemos

$$|Tg(j,k)| \le \frac{1}{\sigma_\mu(I_{j,k})} \int_{I_{j,k}^+} |g| \sigma d\mu \le \|g\|_{L^\infty(\sigma d\mu)} \frac{\sigma_\mu(I_{j,k}^+)}{\sigma_\mu(I_{j,k})} \le \|g\|_{L^\infty(\sigma d\mu)},$$

luego $\|Tg\|_{L^\infty(\nu)} \le \|g\|_{L^\infty(\sigma d\mu)}$. Por tanto, basta probar que T es acotado de $L^1(\sigma d\mu)$ en $\ell^{1,\infty}(\nu)$, porque mediante una interpolación obtendremos que es acotado de $L^p(\sigma d\mu)$ en

$\ell^p(\nu)$ para todo $p > 1$. Por lo ya dicho, tenemos que probar que existe $C > 0$ tal que para toda función $g \in L^1(\sigma d\mu)$ se tiene

$$\sum_{\{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}:|Tg(j,k)|>\lambda\}} \nu(j,k) \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\sigma(x)d\mu(x),$$

para todo $\lambda > 0$. Es claro que podemos considerar $g \geq 0$. En la suma de la izquierda, solo necesitamos considerar los sumandos tales que $\nu(j,k) > 0$, en particular, esto implica que $\int_{E_{j,k}} ud\mu > 0$, y como $E_{j,k} \subset I^-_{j,k}$ entonces $\int_{I^-_{j,k}} ud\mu > 0$. Por tanto, vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que $\int_{I^-_{j,k}} ud\mu > 0$.

Sea $\lambda > 0$ y $g \in L^1(\sigma d\mu)$ con $g \geq 0$. Consideremos el conjunto $\{I^+_i\}_{i\in\Lambda}$ de intervalos diádicos I^+_i que son maximales en el conjunto $\{I^+_{j,k} : Tg(j,k) = \frac{1}{\sigma_\mu(I_{j,k})}\int_{I^+_{j,k}} g\sigma d\mu > \lambda\}$. Para cada $i \in \Lambda$, definamos $B_i = \{(j,k) : Tg(j,k) > \lambda \text{ e } I^+_{j,k} \subseteq I^+_i\}$. Entonces tenemos,

$$\sum_{\{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}:Tg(j,k)>\lambda\}} \nu(j,k) = \sum_{i\in\Lambda}\sum_{(j,k)\in B_i} \nu(j,k).$$

Sean $(j,k) \in B_i$, y $x \in E_{j,k} \subset I^-_{j,k}$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(I_{j,k})}\int_{I^+_{j,k}} \sigma d\mu =& \frac{1}{\mu(I_{j,k})}\int_{I^+_{j,k}} \sigma\chi_{I^+_i} d\mu \\ \leq& M^+_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^+_i})(x),\end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{(j,k)\in B_i} \nu(j,k) &= \sum_{(j,k)\in B_i}\left(\frac{1}{\mu(I_{j,k})}\int_{I^+_{j,k}} \sigma d\mu\right)^p \int_{E_{j,k}} u(x)d\mu(x) \\ &= \sum_{(j,k)\in B_i}\int_{E_{j,k}} u(x)\left(\frac{1}{\mu(I_{j,k})}\int_{I^+_{j,k}} \sigma d\mu\right)^p d\mu(x) \\ &\leq \sum_{(j,k)\in B_i}\int_{E_{j,k}} \left(M^+_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^+_i})(x)\right)^p u(x)d\mu(x).\end{aligned}$$

Sea $(j,k) \in B_i$, es decir $I^+_{j,k} \subseteq I^+_i$, entonces tenemos dos posibilidades:

- $I^+_{j,k} = I^+_i$, y por tanto, $I^-_{j,k} = I^-_i$.
- $I^+_{j,k} \subsetneq I^+_i$, y por tanto, $I^-_{j,k} \subsetneq I^+_i$.

Por tanto, para cada $(j,k) \in B_i$ tenemos $E_{j,k} \subset I^-_{j,k} \subset I^-_i \cup I^+_i = I_i$. Como los $E_{j,k}$ son disjuntos dos a dos, entonces tenemos

$$\bigcup_{(j,k)\in B_i} E_{j,k} \subset I_i.$$

Por tanto, usando que $(u,v) \in S^+_{p,d}(\mu)$ podemos concluir,

$$\begin{aligned}
\sum_{\{(j,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}:Tg(j,k)>\lambda\}} \nu(j,k) &= \sum_{i\in\Lambda}\sum_{(j,k)\in B_i} \nu(j,k) \\
&\leq \sum_{i\in\Lambda}\sum_{(j,k)\in B_i} \int_{E_{j,k}} \left(M^+_{\mu,d}(\sigma\chi_{I_i^+})(x)\right)^p u(x)d\mu(x) \\
&= \sum_{i\in\Lambda} \int_{\bigcup_{(j,k)\in B_i} E_{j,k}} \left(M^+_{\mu,d}(\sigma\chi_{I_i^+})(x)\right)^p u(x)d\mu(x) \\
&\leq \sum_{i\in\Lambda} \int_{I_i} \left(M^+_{\mu,d}(\sigma\chi_{I_i^+})(x)\right)^p u(x)d\mu(x) \\
&\leq C\sum_{i\in\Lambda} \int_{I_i^+} \sigma d\mu \leq C\sum_{i\in\Lambda} \int_{I_i} \sigma d\mu \\
&\leq C\sum_{i\in\Lambda} \frac{1}{\lambda}\int_{I_i^+} g\sigma d\mu = \frac{C}{\lambda}\int_{\bigcup_{i\in\Lambda} I_i^+} g\sigma d\mu \\
&\leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} g\sigma d\mu.
\end{aligned}$$

□

Como consecuencia del resultado anterior y el Teorema 4.30 tenemos que la condición $S^+_{p,d}(\mu)$ implica $A^+_{p,d}(\mu)$.

Corolario 4.28. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos compactos, y (u,v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Si $(u,v)\in S^+_{p,d}(\mu)$, entonces $(u,v)\in A^+_{p,d}(\mu)$.*

Análogamente se prueba el resultado para el operador $M^-_{\mu,d}$.

Teorema 4.29. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados, $1<p<\infty$ y (u,v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Sea $\sigma = v^{1-p'}$ donde p' es el exponente conjugado de p. Son equivalentes:*

1. *Existe $C>0$ tal que*

$$\int_I |M^-_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^-})(x)|^p u(x)d\mu(x) \leq C\int_{I^-}\sigma(x)d\mu(x) < \infty. \qquad (S^-_{p,d}(\mu))$$

   para todo intervalo diádico I tal que $\int_{I^+} ud\mu > 0$.

2. *Existe $C>0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |M^-_{\mu,d}f(x)|^p u(x)d\mu(x) \leq C\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x)d\mu(x), \qquad (4.35)$$

   para toda $f\in L^p(vd\mu)$.

Definición 4.30. Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$, y $1<p<\infty$. Diremos que un par de pesos (u,v) verifica la condición $S^-_{p,d}(\mu)$, o simplemente, $(u,v)\in S^-_{p,d}(\mu)$ si se verifica ($S^-_{p,d}(\mu)$).

Corolario 4.31. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos compactos, y (u,v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Si $(u,v)\in S^-_{p,d}(\mu)$, entonces $(u,v)\in A^-_{p,d}(\mu)$.*

6. Acotación de $M^+_{\mu,d}$ con pesos iguales

En esta sección vamos a trabajar con pares pesos $A^+_{p,d}(\mu)$, donde ambos pesos son iguales, es decir, $(w,w) \in A^+_{p,d}(\mu)$. Al igual que en los capítulos anteriores, escribiremos $w \in A^+_{p,d}(\mu)$ para referirnos a $(w,w) \in A^+_{p,d}(\mu)$. Bajo una condición de duplicación en la medida μ probaremos que si $w \in A^+_{p,d}(\mu)$ entonces $M^+_{\mu,d}$ es acotado en $L^p(wd\mu)$. Como consecuencia obtendremos que la acotación de $M^+_{\mu,d}$ en $L^p(wd\mu)$ es equivalente a que $M^+_{\mu,d}$ sea de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(wd\mu, wd\mu)$.

Veamos que, para pesos iguales, el recíproco del Corolario 4.28 es cierto.

Proposición 4.32. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos compactos y duplicante a la izquierda. Sea $1 < p < \infty$. Entonces, $w \in A^+_{p,d}(\mu)$ si y solo si $(w,w) \in S^+_{p,d}(\mu)$.*

Demostración: Sea $w \in A^+_{p,d}(\mu)$, y denotemos $\sigma = w^{1-p'}$. Sea I un intervalo diádico, entonces la condición $A^+_{p,d}(\mu)$ implica que si $\int_{I^-} u d\mu > 0$, entonces $\int_{I^+} \sigma d\mu < \infty$. Por tanto, es suficiente probar que existen dos constantes $C, C' > 0$ tales que

1. $\displaystyle\int_{I^-} |M^+_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^+})(x)|^p w(x) d\mu(x) \leq C \int_{I^+} \sigma(x) d\mu(x),$
2. $\displaystyle\int_{I^+} |M^+_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^+})(x)|^p w(x) d\mu(x) \leq C \int_{I^+} \sigma(x) d\mu(x),$

ya que una vez probado sumando ambas expresiones obtenemos ($S^+_{p,d}(\mu)$). Probemos 1 en primer lugar. Para cada $x \in I^-$, en el supremo

$$M^+_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^+})(x) = \sup_{J \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\mu(J)} \int_{J^+} \sigma\chi_{I^+} d\mu \right) \chi_{J^-}(x),$$

solo es necesario considerar aquellos intervalos diádicos $J \in \mathcal{D}$ tales que $J^+ \cap I^+ \neq \emptyset$ y $x \in J^-$. El único intervalo que cumple eso es $J = I$ (si $J, I \in \mathcal{D}$, $J^+ \cap I^+ \neq \emptyset$ y $J^- \cap I^- \neq \emptyset$, entonce $J = I$), y por tanto,

$$M^+_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^+})(x) = \sup_{J \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{\mu(J)} \int_{J^+} \sigma\chi_{I^+} d\mu \right) \chi_{J^-}(x) = \frac{1}{\mu(I)} \int_{I^+} \sigma d\mu,$$

para todo $x \in I^-$. Usando que $w \in A^+_{p,d}(\mu)$, podemos concluir

$$\int_{I^-} |M^+_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^+})(x)|^p w(x) d\mu(x) = \left(\int_{I^-} w d\mu \right) \left(\frac{1}{\mu(I)} \int_{I^+} \sigma d\mu \right)^p \leq C \int_{I^+} \sigma d\mu.$$

Probemos ahora el punto 2. Sea $x \in I^+$ y $J \in \mathcal{D}$ un intervalo diádico con $x \in J^-$ tal que $J^+ \cap I^+ \neq \emptyset$. Como $I^+ \cap J^- \neq \emptyset$, entonces $I^+ \subset J^-$ o $J^- \subset I^+$. Necesariamente $J^- \subset I^+$, ya que $I^+ \cap J^+ \neq \emptyset$. De forma análoga, como $J^+ \cap I^+ \neq \emptyset$ entonces $J^+ \subset I^+$, y por tanto $J \subset I^+$. Entonces tenemos

$$\frac{1}{\mu(J)} \int_{J^+} \sigma\chi_{I^+} d\mu = \frac{1}{\mu(J)} \int_{J^+} \sigma d\mu.$$

Podemos escribir la condición $A^+_{p,d}(\mu)$ de la siguiente forma,

$$\left(\frac{1}{\mu(J)}\int_{J^+}\sigma d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C\left(\frac{\mu(J)}{w_\mu(J^-)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Entonces, usando la condición de duplicación de μ y la inclusión $J^- \subset I^+$ tenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\mu(J)}\int_{J^+}\sigma\chi_{I^+}d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} &= \left(\frac{1}{\mu(J)}\int_{J^+}\sigma d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C\left(\frac{\mu(J)}{w_\mu(J^-)}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq C\left(\frac{D^-(\mu)\mu(J^-)}{w_\mu(J^-)}\right)^{\frac{1}{p}} = D^-(\mu)^{\frac{1}{p}}C\left(\frac{1}{w_\mu(J^-)}\int_{J^-}d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= D^-(\mu)^{\frac{1}{p}}C\left(\frac{1}{w_\mu(J^-)}\int_{J^-}w^{-1}\chi_{I^+}wd\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq D^-(\mu)^{\frac{1}{p}}C\left(M_{wd\mu,d}(w^{-1}\chi_{I^+})(x)\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Por tanto, tomando supremo sobre todos los intervalos diádicos $J \in \mathcal{D}$ tales que $x \in J^-$ tenemos

$$M^+_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^+})(x) \leq D^-(\mu)^{\frac{1}{p}}C\left(M_{wd\mu,d}(w^{-1}\chi_{I^+})(x)\right)^{\frac{p'}{p}},$$

para todo $x \in I^+$. Aplicando el Teorema 4.4 tenemos que $M_{wd\mu,d}$ es acotado en $L^{p'}(wd\mu)$, y por tanto podemos concluir

$$\begin{aligned}\int_{I^+}|M^+_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^+})(x)|^p w(x)d\mu(x) &\leq D^-(\mu)C^p\int_{I^+}|M_{wd\mu,d}(w^{-1}\chi_{I^+})(x)|^{p'}w(x)d\mu(x)\\ &\leq D^-(\mu)C^p\int_{\mathbb{R}}|M_{wd\mu,d}(w^{-1}\chi_{I^+})(x)|^{p'}w(x)d\mu(x)\\ &\leq D^-(\mu)C^p\widetilde{C}\int_{\mathbb{R}}|w(x)^{-1}\chi_{I^+}(x)|^{p'}w(x)d\mu(x)\\ &= D^-(\mu)C^p\widetilde{C}\int_{I^+}w(x)^{1-p'}d\mu(x)\\ &= D^-(\mu)C^p\widetilde{C}\int_{I^+}\sigma(x)d\mu(x).\end{aligned}$$

□

Sería interesante conocer si la condición de duplicación de la medida μ puede omitirse en el resultado anterior.

Como consecuencia de este resultado tenemos.

Teorema 4.33. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos compactos y duplicante a la izquierda. Sean $1 < p < \infty$ y w un peso en $\mathbb{R}$. Son equivalentes:*

1. *$w \in A^+_{p,d}(\mu)$.*
2. *$M^+_{\mu,d}$ es de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(wd\mu, wd\mu)$, es decir, existe una constante $C > 0$,*

$$\int_{\{y\in\mathbb{R}:M^+_{\mu,d}f(y)>\lambda\}} w(x)d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p w(x)d\mu(x),$$

para toda $f \in L^p(wd\mu)$, y todo $\lambda > 0$.

3. $M^+_{\mu,d}$ *es acotado en* $L^p(wd\mu)$*, es decir, existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |M^+_{\mu,d} f(x)|^p w(x) d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x) d\mu(x),$$

para toda $f \in L^p(wd\mu)$*.*

De forma análoga se prueban los resultados para $M^-_{\mu,d}$.

Proposición 4.34. *Sea* μ *una medida de Borel en* $\mathbb{R}$ *finita sobre conjuntos compactos y duplicante a la derecha. Sea* $1 < p < \infty$*. Si* $w \in A^-_{p,d}(\mu)$*, entonces* $w \in S^-_{p,d}(\mu)$*.*

Teorema 4.35. *Sea* μ *una medida de Borel en* $\mathbb{R}$ *finita sobre conjuntos compactos y duplicante a la derecha. Sean* $1 < p < \infty$ *y* w *un peso en* $\mathbb{R}$*. Son equivalentes:*

1. $w \in A^-_{p,d}(\mu)$*.*
2. $M^-_{\mu,d}$ *es de tipo débil* (p,p) *con respecto a las medidas* $(wd\mu, wd\mu)$*, es decir, existe una constante* $C > 0$*,*

$$\int_{\{y \in \mathbb{R} : M^-_{\mu,d} f(y) > \lambda\}} w(x) d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x) d\mu(x),$$

para toda $f \in L^p(wd\mu)$*, y todo* $\lambda > 0$*.*

3. $M^-_{\mu,d}$ *es acotado en* $L^p(wd\mu)$*, es decir, existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |M^-_{\mu,d} f(x)|^p w(x) d\mu(x) \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x) d\mu(x),$$

para toda $f \in L^p(wd\mu)$*.*

7. Desigualdades con pesos para $M_{\mu,d}$ en $\mathbb{R}$

En esta sección vamos a usar las caracterizaciones de las secciones anteriores, para probar las correspondientes desigualdades con pesos para $M_{\mu,d}$. Para ello vamos a usar la siguiente desigualdad,

$$M_{\mu,d} f \leq M^+_{\mu,d} f + M^-_{\mu,d} f. \tag{4.36}$$

En primer lugar definiremos la clase de pesos $A_{p,d}(\mu)$.

Definición 4.36. Sean (u, v) un par de pesos en $\mathbb{R}$.

- Si $1 < p < \infty$, decimos que (u, v) verifica la condición $A_{p,d}(\mu)$, o simplemente $(u, v) \in A_{p,d}(\mu)$, si existe $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{\mu(I)} \int_I u(x) d\mu(x)\right) \left(\frac{1}{\mu(I)} \int_I v(x)^{1-p'} d\mu(x)\right)^{p-1} \leq C \tag{4.37}$$

para todo intervalo diádico $I \in \mathcal{D}$.

- Diremos que (u,v) verifica la condición $A_{1,d}(\mu)$, o simplemente $(u,v) \in A_{1,d}(\mu)$, si existe $C>0$ tal que para cada intervalo diádico $I \in \mathcal{D}$ se tiene

$$\frac{1}{\mu(I)}\int_I u(x)d\mu(x) \leq Cv(x) \tag{4.38}$$

  para casi todo $x \in I$.

Ahora estudiemos la relación de las clases $A^+_{p,d}(\mu)$ y $A^-_{p,d}(\mu)$ con $A_{p,d}(\mu)$.

Teorema 4.37. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos compactos. Entonces $A_{p,d}(\mu) = A^+_{p,d}(\mu) \cap A^-_{p,d}(\mu)$ para todo $1 \leq p < \infty$.*

Demostración: Supongamos que $(u,v) \in A_{p,d}(\mu)$. Si $p>1$, entonces para cada $I \in \mathcal{D}$ tenemos,

$$\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^-} u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^+} v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1}$$
$$\leq \left(\frac{1}{\mu(I)}\int_I u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_I v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1} \leq C,$$

y

$$\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^+} u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^-} v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1}$$
$$\leq \left(\frac{1}{\mu(I)}\int_I u(x)d\mu(x)\right)\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_I v(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1} \leq C.$$

Luego, $(u,v) \in A^+_{p,d}(\mu) \cap A^-_{p,d}(\mu)$. Si $p=1$, entonces para cada $I \in \mathcal{D}$ tenemos,

$$\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^-} u(x)d\mu(x) \leq \frac{1}{\mu(I)}\int_I u(x)d\mu(x) \leq Cv(x)$$

en casi todo $x \in I$, luego $(u,v) \in A^+_{1,d}(\mu)$. De forma similar se prueba que $(u,v) \in A^-_{1,d}(\mu)$, y por tanto $(u,v) \in A^+_{1,d}(\mu) \cap A^-_{1,d}(\mu)$. Recíprocamente, supongamos $(u,v) \in A^+_{p,d}(\mu) \cap A^-_{p,d}(\mu)$. Entonces aplicando los Teoremas 4.24 y 4.25 tenemos que $M^+_{\mu,d}$ y $M^-_{\mu,d}$ son de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Usando la desigualdad (4.36) tenemos,

$$\{x \in \mathbb{R} : M_{\mu,d}f(x) > \lambda\} \subset \left\{x \in \mathbb{R} : M^+_{\mu,d}f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : M^-_{\mu,d}f(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Por tanto,

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}:M_{\mu,d}f(x)>\lambda\}} ud\mu \leq \int_{\left\{x\in\mathbb{R}:M^+_{\mu,d}f(x)>\frac{\lambda}{2}\right\}} ud\mu + \int_{\left\{x\in\mathbb{R}:M^-_{\mu,d}f(x)>\frac{\lambda}{2}\right\}} ud\mu$$
$$\leq \frac{2^pC_1}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}} |f|^p v d\mu + 2^pC_2\lambda^p \int_{\mathbb{R}} |f|^p v d\mu = \frac{2^p(C_1+C_2)}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}} |f|^p v d\mu,$$

para todo $\lambda > 0$. Luego $M_{\mu,d}$ es de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$, y de la forma habitual obtenemos que $(u,v) \in A_{p,d}(\mu)$. □

De hecho, en la prueba anterior hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 4.38. *Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos compactos. Sean $1 \leq p < \infty$, y (u, v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Son equivalentes:*

1. $(u, v) \in A_{p,d}(\mu)$.
2. *$M_{\mu,d}$ es de tipo débil (p, p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que para cada $f \in L^p(vd\mu)$ se verifica,*

$$\int_{\{y\in\mathbb{R}:M_{\mu,d}f(y)>\lambda\}} u(x)d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x)d\mu(x), \tag{4.39}$$

para todo $\lambda > 0$.

También podemos dar la caracterización de los pares de pesos para los que $M_{\mu,d}$ es de tipo fuerte (p, p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$.

Teorema 4.39. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados, $1 < p < \infty$ y (u, v) un par de pesos en $\mathbb{R}$. Sea $\sigma = v^{1-p'}$ donde p' es el exponente conjugado de p. Son equivalentes:*

1. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\int_I |M_{\mu,d}(\sigma\chi_I)(x)|^p u(x)d\mu(x) \leq C\int_I \sigma(x)d\mu(x) < \infty. \tag{$S_{p,d}(\mu)$}$$

para todo intervalo diádico $I \in \mathcal{D}$ tal que $\int_I ud\mu > 0$.

2. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |M_{\mu,d}f(x)|^p u(x)d\mu(x) \leq C\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x)d\mu(x), \tag{4.40}$$

para toda $f \in L^p(vd\mu)$.

Demostración: Supongamos que $(u, v) \in S_{p,d}(\mu)$, y veamos en primer lugar que $(u, v) \in A_{p,d}(\mu)$. Sea $I \in \mathcal{D}$ un intervalo diádico. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $\int_I ud\mu > 0$. Observemos que para cada $x \in I$ se verifica $\frac{1}{\mu(I)}\int_I \sigma d\mu \leq M_{\mu,d}(\sigma\chi_I)(x)$. Y, por tanto,

$$\begin{aligned}\left(\int_I ud\mu\right)\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_I \sigma d\mu\right)^p &= \int_I \left(\frac{1}{\mu(I)}\int_I \sigma d\mu\right)^p ud\mu \leq \int_I |M_{\mu,d}(\sigma\chi_I)|^p ud\mu \\ &\leq C\int_I \sigma d\mu < \infty,\end{aligned}$$

luego $(u, v) \in A_{p,d}(\mu)$. Entonces aplicando el Teorema 4.37 tenemos $(u, v) \in A^+_{p,d}(\mu) \cap A^-_{p,d}(\mu)$. Veamos ahora que $(u, v) \in S^+_{p,d}(\mu)$. Sea $I \in \mathcal{D}$ un intervalo diádico. En la demostración de la Proposición 4.32 probamos que si $x \in I^-$ entonces $M^+_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^+})(x) = \frac{1}{\mu(I)}\int_{I^+} \sigma d\mu$. Usando esta última observación, y que $M^+_{\mu,d} \leq M_{\mu,d}$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_I |M^+_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^+})|^p ud\mu &= \int_{I^-} |M^+_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^+})|^p ud\mu + \int_{I^+} |M^+_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^+})|^p ud\mu \\ &\leq \int_{I^-}\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^+}\sigma d\mu\right)^p ud\mu + \int_{I^+} |M_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^+})|^p ud\mu \\ &= \left(\int_{I^-} ud\mu\right)\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^+}\sigma d\mu\right)^p + \int_{I^+} |M_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^+})|^p ud\mu.\end{aligned}$$

Entonces, como $(u,v) \in A_{p,d}^+(\mu)$ y $(u,v) \in S_{p,d}(\mu)$, obtenemos,

$$\begin{aligned}\int_I |M_{\mu,d}^+(\sigma\chi_{I^+})|^p u d\mu \leq& \left(\int_{I^-} u d\mu\right)\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_{I^+}\sigma d\mu\right)^p + \int_{I^+}|M_{\mu,d}(\sigma\chi_{I^+})|^p u d\mu\\ \leq& C_1\int_{I^+}\sigma d\mu + C_2\int_{I^+}\sigma d\mu = (C_1+C_2)\int_{I^+}\sigma d\mu,\end{aligned}$$

es decir, $(u,v) \in S_{p,d}^+(\mu)$. Análogamente se obtiene $(u,v) \in S_{p,d}^-(\mu)$. Por tanto $M_{\mu,d}^+$ y $M_{\mu,d}^-$ son de tipo fuerte (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Como consecuencia, para cada $f \in L^p(vd\mu)$ tenemos

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}} |M_{\mu,d}f(x)|^p u(x)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq& \left(\int_{\mathbb{R}} |M_{\mu,d}^+ f(x) + M_{\mu,d}^- f(x)|^p u(x)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\\ \leq& \left(\int_{\mathbb{R}} |M_{\mu,d}^+ f(x)|^p u(x)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}} |M_{\mu,d}^- f(x)|^p u(x)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\\ \leq& C_1\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} + C_2\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\\ =& (C_1+C_2)\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $M_{\mu,d}$ es de tipo fuerte (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$. Por tanto, $M_{\mu,d}$ es de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(ud\mu, vd\mu)$, y aplicando el teorema anterior tenemos $(u,v) \in A_{p,d}(\mu)$. Sea $I \in \mathcal{D}$ un intervalo diádico tal que $\int_I u d\mu > 0$, entonces por la condición $A_{p,d}(\mu)$ tenemos que $\int_I \sigma d\mu < \infty$. Por último, basta tomar $f = \sigma\chi_I$ en (4.40) y obtenemos $(u,v) \in S_{p,d}(\mu)$. □

Estudiemos ahora la acotación de $M_{\mu,d}$ para pesos iguales. Al igual que en capítulos anteriores, usaremos la notación $w \in A_{p,d}(\mu)$ para referirnos a $(w,w) \in A_{p,d}(\mu)$. Para usar los resultados anteriores sobre maximales laterales diádicos tendríamos que suponer que μ verifica la propiedad de duplicación. Sin embargo, podemos evitar esta hipótesis adicional en μ haciendo una demostración tipo *Lerner* [20].

Teorema 4.40. *Sean μ una medida de Borel en $\mathbb{R}$ finita sobre conjuntos acotados, $1 < p < \infty$ y w un peso en $\mathbb{R}$. Sea $\sigma = v^{1-p'}$ donde p' es el exponente conjugado de p. Son equivalentes:*

1. *$w \in A_{p,d}(\mu)$.*
2. *Existe $C > 0$ tal que para toda $f \in L^p(wd\mu)$ se tiene*

$$M_{\mu,d}f(x) \leq C\left[M_{wd\mu,d}(w^{-1}M_{\sigma d\mu,d}(f\sigma^{-1})^{p-1})(x)\right]^{\frac{1}{p-1}},$$

   para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. *Existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |M_{\mu,d}f(x)|^p w(x)d\mu(x) \leq C\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x)d\mu(x), \tag{4.41}$$

   para toda $f \in L^p(wd\mu)$.

Demostración: Supongamos que $w \in A_{p,d}(\mu)$. Entonces existe $C > 0$ tal que

$$1 \leq C \frac{\mu(I)}{\sigma_\mu(I)} \left(\frac{\mu(I)}{w_\mu(I)} \right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{4.42}$$

para cada intervalo diádico I. Sea $x \in \mathbb{R}$, y sea $I \in \mathcal{D}$ un intervalo diádico tal que $x \in I$. Sea $f \in L^p(wd\mu)$, entonces multiplicando el promedio $\frac{1}{\mu(I)} \int_I |f| d\mu$ en la desigualdad (4.42) podemos estimar de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(I)} \int_I |f| d\mu \leq & C \frac{\mu(I)}{\sigma_\mu(I)} \left(\frac{\mu(I)}{w_\mu(I)} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{1}{\mu(I)} \int_I |f| d\mu \\
= & C \left[\frac{\mu(I)}{w_\mu(I)} \left(\frac{1}{\sigma_\mu(I)} \int_I |f| d\mu \right)^{p-1} \right]^{\frac{1}{p-1}} \\
= & C \left[\frac{1}{w_\mu(I)} \int_I \left(\frac{1}{\sigma_\mu(I)} \int_I |f| \sigma^{-1} \sigma d\mu \right)^{p-1} d\mu(y) \right]^{\frac{1}{p-1}} \\
\leq & C \left[\frac{1}{w_\mu(I)} \int_I \left(M_{\sigma d\mu,d}(f\sigma^{-1})(y) \right)^{p-1} w(y)^{-1} w(y) d\mu(y) \right]^{\frac{1}{p-1}} \\
\leq & C \left[M_{wd\mu,d}(w^{-1} M_{\sigma d\mu,d}(f\sigma^{-1})^{p-1})(x) \right]^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Entonces, tomando supremo sobre todos los intervalos diádicos I con $x \in I$ tenemos

$$M_{\mu,d} f(x) \leq C \left[M_{wd\mu,d}(w^{-1} M_{\sigma d\mu.d}(f\sigma^{-1})^{p-1})(x) \right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Ahora bien, como $M_{wd\mu,d}$ y $M_{\sigma d\mu,d}$ son maximales diádicos, entonces el Teorema 4.4 nos dice que $M_{wd\mu,d}$ es acotado en $L^{p'}(wd\mu)$ y, $M_{\sigma d\mu,d}$ es acotado en $L^p(\sigma d\mu)$, con constantes C_1 y C_2 respectivamente. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |M_{\mu,d} f(x)|^p w(x) d\mu(x) \leq & C^p \int_{\mathbb{R}} \left| M_{wd\mu,d} \left(w^{-1} M_{\sigma d\mu,d}(f\sigma^{-1})^{p-1} \right)(x) \right|^{\frac{p}{p-1}} w(x) d\mu(x) \\
\leq & C^p C_1 \int_{\mathbb{R}} \left| w(x)^{-1} M_{\sigma d\mu,d}(f\sigma^{-1})(x)^{p-1} \right|^{p'} w(x) d\mu(x) \\
= & C^p C_1 \int_{\mathbb{R}} \left| M_{\sigma d\mu,d}(f\sigma^{-1})(x) \right|^p \sigma(x) d\mu(x) \\
\leq & C^p C_1 C_2 \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) \sigma^{-1}(x) \right|^p \sigma(x) d\mu(x) \\
= & C^p C_1 C_2 \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x) d\mu(x).
\end{aligned}$$

Luego $M_{\mu,d}$ es acotado en $L^p(wd\mu)$. Recíprocamente, si suponemos que $M_{\mu,d}$ está acotado en $L^p(wd\mu)$, entonces es de tipo débil (p,p) con respecto a las medidas $(wd\mu, wd\mu)$, y aplicando el Teorema 4.38 se obtiene $w \in A_{p,d}(\mu)$. □

Bibliografía

[1] K. F. Andersen, *Weighted inequalities for maximal functions associated with general measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **326** (1991), no. 2, 907–920.

[2] A. Bernal, *A note on the one-dimensional maximal function*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **111** (1989), no. 3-4, 325–328.

[3] S. M. Buckley, *Estimates for operator norms on weighted spaces and reverse Jensen inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc. **340** (1993), no. 1, 253–272.

[4] R. Coifman, P. Jones, and J. L. Rubio de Francia, *Constructive decomposition of BMO functions and factorization of A_p weights*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), no. 4, 675–676.

[5] D. Cruz-Uribe, *New proofs of two-weight norm inequalities for the maximal operator*, Georgian Math. J. **7** (2000), no. 1, 33–42.

[6] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[7] C. Fefferman and E. M. Stein, *Some maximal inequalities*, Amer. J. Math. **93** (1971), 107–115.

[8] L. Forzani, R. Scotto, P. Sjögren, and W. Urbina, *On the L^p boundedness of the non-centered Gaussian Hardy-Littlewood maximal function*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 1, 73–79.

[9] J. García-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 116, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.

[10] L. Grafakos, *Classical Fourier analysis*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 249, Springer, New York, 2008.

[11] L. Grafakos and J. Kinnunen, *Sharp inequalities for maximal functions associated with general measures*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **128** (1998), no. 4, 717–723.

[12] P. Gurka, F. J Martín-Reyes, P. Ortega, L. Pick, M. D. Sarrión, and A. de la Torre, *Good and bad measures*, J. London Math. Soc. (2) **61** (2000), no. 1, 123–138.

[13] M. de Guzmán, *Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 481, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[14] ———, *Real variable methods in Fourier analysis*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 46, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981.

[15] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Math. **54** (1930), no. 1, 81–116.

[16] E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. Third printing, Graduate Texts in Mathematics, No. 25.

[17] R. A. Hunt, D. S. Kurtz, and C. J. Neugebauer, *A note on the equivalence of A_p and Sawyer's condition for equal weights*, Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Vol. I, II (Chicago, Ill., 1981), 1983, pp. 156–158.

[18] B. Jawerth, *Weighted inequalities for maximal operators: linearization, localization and factorization*, Amer. J. Math. **108** (1986), no. 2, 361–414.

[19] P. Jones, *Factorization of A_p weights*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 3, 511–530.

[20] A. K. Lerner, *An elementary approach to several results on the Hardy-Littlewood maximal operator*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 8, 2829–2833.

[21] M. Lorente and F. J. Martín-Reyes, *The one-sided dyadic Hardy-Littlewood maximal operator*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **144** (2014), no. 5, 991–1006.

[22] F. J. Martín-Reyes, *New proofs of weighted inequalities for the one-sided Hardy-Littlewood maximal functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), no. 3, 691–698.

[23] F. J. Martín-Reyes, P. Ortega Salvador, and A. de la Torre, *Weighted inequalities for one-sided maximal functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **319** (1990), no. 2, 517–534.

[24] F. J. Martín-Reyes and A. de la Torre, *Sharp weighted bounds for one-sided maximal operators*, Collect. Math. **66** (2015), no. 2, 161–174.

[25] H. P. McKean, *Stochastic integrals*, Probability and Mathematical Statistics, No. 5, Academic Press, New York-London, 1969.

[26] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226.

[27] S. Ombrosi, *Weak weighted inequalities for a dyadic one-sided maximal function in $\mathbb{R}^n$*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 6, 1769–1775.

[28] J. Orobitg and C. Pérez, *A_p weights for nondoubling measures in $\mathbb{R}^n$ and applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 5, 2013–2033.

[29] J. L. Rubio de Francia, *Factorization theory and A_p weights*, Amer. J. Math. **106** (1984), no. 3, 533–547.

[30] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Third, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[31] E. T. Sawyer, *A characterization of a two-weight norm inequality for maximal operators*, Studia Math. **75** (1982), no. 1, 1–11.

[32] E. Sawyer, *Weighted inequalities for the one-sided Hardy-Littlewood maximal functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **297** (1986), no. 1, 53–61.

[33] P. Sjögren, *A remark on the maximal function for measures in* $\mathbb{R}^n$, Amer. J. Math. **105** (1983), no. 5, 1231–1233.

[34] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series, vol. 43, Princeton University Press, 1993. Monographs in Harmonic Analysis, III.

[35] E. M. Stein and R. Shakarchi, *Real analysis*, Princeton Lectures in Analysis, vol. 3, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.

[36] J. Strömberg and A. Torchinsky, *Weighted Hardy spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1381, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[37] A. Torchinsky, *Real variables*, Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1988.